Tampereen yliopisto

Mirka Karjalainen

OPETUSMENETELMÄN VAIKUTUS INSINÖÖRIEN MATEMAATTISEN OSAAMISEN KEHITTYMISEEN YLIOPISTO-OPINTOJEN ALUSSA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Marraskuu 2020

TIIVISTELMÄ

Mirka Karjalainen: Opetusmenetelmän vaikutus insinöörien matemaattisen osaamisen kehittymiseen yliopisto-opintojen alussa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2020

Tämä tutkimus käsittelee opintojensa aloittavien insinöörien matematiikan perustaitojen ja kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson matemaattisen osaamisen kehittymistä pidemmällä aikavälillä. Tarkastelussa on erityisesti kahden eri opetusmenetelmän vaikutus matemaattisen osaamisen kehitykseen, koska tutkimuksen kohteena ovat opintojaksojen rinnakkaiset toteutukset. Tarkoituksena on lisäksi yksilöidä tarkemmin, mitkä matemaattisen osaamisen osa-alueet kehittyvät.

Tutkimuksen testiryhmän opetus on järjestetty käänteisen oppimisen keinoin. Käänteisen oppimisen perusajatus on siirtää oppimista opiskelijakeskeisempään suuntaan. Opetus ei ole luento-opetusta, vaan opiskelijalle tarjotaan joustavia oppimisympäristöjä, oppiminen on yhteisöllistä, tarjolla on oikea-aikaista tukea ja mahdollisuus edetä omaan tahtiin. Verrokkiryhmän opetus on toteutettu eräänlaisena hybridimallina, jossa opetus jakautuu puoliksi luentoihin ja puoliksi käytännön laskemiseen. Malli aktivoi opiskelijaa ja tukee oppimisen yhteisöllisyyttä, mutta sisältää edelleen perinteistä luento-opetusta.

Aineisto kerättiin lukuvuoden alussa tehdyn perustaitotestin, opintojaksojen tenttien sekä kolmannen insinöörimatematiikan opintojakson alussa järjestetyn lopputestin tuloksista. Tehtävien pisteet toimivat aineistona tutkimuksen määrälliselle analyysille. Pisteet analysoitiin käyttäen kahta tilastollista testiä. Wilcoxonin testillä testattiin ryhmän oma kehitys matemaattisessa osaamisessa ja ryhmien välinen vertailu tehtiin Mann–Whitneyn U-testillä. Tutkimuksen laadullinen puoli toteutettiin vertailuun valikoituneiden tehtävien tehtävänantoja analysoimalla, ja erottelemalla niiden mittaaman matemaattisen osaamisen ulottuvuudet sisällönanalyysin menetelmin.

Tulosten mukaan tehtävät mittasivat ainoastaan kahden matemaattisen osaamisen ulottuvuuden kehitystä useista eri osa-alueista. Opiskelijoiden matematiikan perustaitojen osaaminen kehittyi tai säilyi vähintään samana pidemmällä aikavälillä ja hybridimalli tuki hieman paremmin perustaitojen kehityksessä. Kahden ensimmäisen opintojakson sisältöjen osaamisen kehittymisen osalta havaittiin, että käänteinen oppiminen voi tukea kehitystä hybridimallia paremmin pidemmällä aikavälillä, ja hybridimalli lyhyemmällä. Tuloksista kävi myös ilmi, että matriisilaskennan osaaminen heikkeni opintojakson jälkeen kummankin ryhmän kohdalla. Tulosten perusteella tutkimusta ilmiön parissa kannattaisi jatkaa kehittäen matemaattisen osaamisen testaamista.

Avainsanat: matemaattinen osaaminen, käänteinen oppiminen, aktiivinen oppiminen, sulautettu oppiminen, käänteinen arviointi, insinöörimatematiikka, matriisilaskenta

Sisältö

1 Johdanto

Matematiikan osaamista voidaan pitää tärkeänä osana insinöörin taitoja. Matematiikkaa tulee osata käyttää työkalun tavoin insinöörin työn välineenä, mutta matematiikka tarjoaa tämän lisäksi paljon muutakin. Matematiikka kehittää muuan muassa yksilön ongelmanratkaisukykyä, loogista päättelykykyä ja pitkäjänteisyyttä, jotka ovat nekin erittäin tärkeitä työelämän taitoja. Tämän vuoksi on huolestuttavaa, että matematiikan osaaminen on heikentynyt Suomessa sekä peruskoulu- että yliopistotasolla [31] [19] [41] [23].

Jotta osaamisen tasoa saadaan kasvatettua, tulee opetusta kehittää matemaattisen osaamisen tukemisen näkökulmasta. Tätä kehitystyötä tehdään myös Tampereen yliopiston insinöörikoulutuksessa, jossa tavoitteena on nostaa osaaminen vähintään opinnoissa tarvittavalle tasolle [16]. Osaamisen heikkeneminen on näkynyt niin, että opiskelijoilla on yhä suuremmissa määrin ongelmia matematiikan opintojensa kanssa. Vain alle 60 % vuosina 2010–2012 aloittaneista Hervannan kampuksen opiskelijoista ovat suorittaneet kahden ensimmäisen vuoden matematiikan opintojaksonsa näiden vuosien aikana [27, s. 54–55].

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tarkastella kahden tavallisesta luento-opetuksesta poikkeavan opetusmenetelmän vaikutusta matemaattisen osaamisen kehitykseen opintonsa aloittavilla insinööreillä. Tutkimuksessa ei tarkastella vain opintojaksojen jälkeisiä tenttituloksia, vaan matemaattisen osaamisen kehitystä tutkitaan tätä pidemmällä aikavälillä. Onhan matemaattinen osaaminen tarkoitus säilyttää vielä työelämässäkin.

Tutkimus toteutettiin Tampereen yliopiston Hervannan kampuksella lukuvuonna 2019–2020 ensimmäisen vuoden opiskelijoille. Tutkimuksen otos koostui opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2 rinnakkaisista toteutuksista, jotka toteutettiin käyttäen erilaisia opetusmenetelmiä. Opiskelijoiden osaamisen kehittymistä tutkittiin vertailemalla heidän matemaattista osaamistaan mittaavien opintojaksojen lopputenttien tuloksia myöhemmin järjestettävän testin tuloksiin sekä vertailemalla kahden matematiikan perustaitoja mittaavan testin tuloksia keskenään. Tuloksia tarkasteltiin toteutuksilla erikseen ja vertailemalla toteutusten tuloksia keskenään. Lisäksi selvitettiin, minkälaista matemaattista osaamista valitut tehtävät todella mittasivat, eli kuinka laajasti voitiin puhua matemaattisen osaamisen kehityksestä.

Luvussa 2 tarkastellaan tutkimuksen lähtökohtia, joita ovat matemaattisen osaamisen tilanne Suomessa ja erityisesti yliopistotasolla, tämän tutkimuksen tarkoitus sekä tutkimuskysymykset. Tämän jälkeen luku 3 keskittyy tämän tutkimuksen kannalta keskeisen opetuksen teoreettisen kontekstin luontiin. Teoriapohja sisältää kuvauksen matemaattisesta osaamisesta, käänteisestä, sulautetusta ja aktiivisesta oppimisesta sekä formatiivisesta ja käänteisestä arvioinnista. Luvussa 4 puolestaan syvennytään korkeakoulussa aloitettavaan uuteen matematiikan osa-alueeseen eli matriisilaskentaan. Aiheen lähempi tarkastelu on tarpeen juuri sen vuoksi, että se on entuudestaan vieras opintonsa aloittaville insinööreille ja koska matriisilaskenta tarjoaa insinöörin työhön oivia työkaluja.

Luvussa 5 perehdytään tutkimuksen toteutuksen konkreettisiin käytännön järjestelyihin tutkimuksen testiryhmän ja verrokkiryhmän opintojaksoilla. Lisäksi luvussa esitellään tutkimuksessa käytettävä tutkimusaineisto ja aineiston analysointimenetelmät. Analyysilla saadut tulokset esitellään luvussa 6 jaoteltuna kahden viimeisen tutkimuskysymyksen mukaan. Luvussa 7 tarkastellaan koko tutkimuksen, ja sen tulosten luotettavuutta ja luvussa 8 pohditaan aiemmin esitettyjen tutkimuksen tuloksiin vaikuttavia tekijöitä sekä peilataan tuloksia juuri esitettyyn luotettavuustarkasteluun. Luvussa 9 tiivistetään tutkimuksen tuloksista tehdyt johtopäätökset, ja näiden kautta tehdään kehitysehdotuksia jatkotutkimusta varten.

2 Tutkimuksen lähtökohdat

Tässä luvussa perehdytään tutkimuksen lähtökohtiin käytännön tasolla sekä perustellaan myöhemmin luvussa esiteltäviä tutkimuksen tarkoitusta ja tutkimuskysymyksiä. Luvussa esitellään opintojaksojen sisältötavoitteet, opiskelijoiden opintosuunnat sekä karkea ero testi- ja verrokkiryhmän kurssien toteutuksissa. Tarkemmat kuvaukset opintojaksojen käytännönjärjestelyistä testi- ja verrokkiryhmille löytyvät luvusta 5. Tässä luvussa pyritään taustoittamaan, miksi matemaattisen osaamisen kehittymistä on syytä tutkia, miten tässä tutkimuksessa on tarkoitus lähestyä ongelmaa ja miksi juuri kyseiset opintojaksot ovat valikoituneet tutkimuksen toteutuksen kohteiksi.

2.1 Opintojaksot Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2

Tutkimukseen valittiin Tampereen yliopiston Hervannan kampuksen lukuvuoden 2019–2020 opintojaksot Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2, jotka sijoittuvat ajallisesti lukuvuoden alussa tehdyn matematiikan perustaitojen testin ja opintojakson Insinöörimatematiikka 3 alussa tehdyn testin väliin. Lukuvuoden alussa tehtyä testiä kutsutaan tässä tutkimuksessa perustaitotestiksi ja Insinöörimatematiikka 3 opintojakson alussa tehtyä testiä nimitetään lopputestiksi. Nämä testit esitellään tarkemmin alaluvussa 5.2.

Opintojaksoja suorittivat pääsääntöisesti ensimmäisen lukuvuoden opiskelijat ja opintojaksot Insinöörimatematiikka 1 ja 2 olivat heidän ensimmäisiä matematiikan opintojaan yliopistossa. Tässä tutkimuksessa testiryhmänä olivat jaksojen Insinöörimatematiikka C1 ja Insinöörimatematiikka C2 opiskelijat, jotka olivat automaatio-, energia-, kone-, materiaali- ja ympäristötekniikan opiskelijoita. Verrokkiryhmän eli opintojaksojen Insinöörimatematiikka B1 ja Insinöörimatematiikka B2 osallistujat olivat biotekniikan, sähkötekniikan ja tietotekniikan opiskelijoita. Kaikilta tutkimukseen osallistuneilta sekä testi- että verrokkiryhmästä oli saatu tutkimusluvat tutkimukseen osallistumiseen. Tutkimusluvallisia osallistujia oli opintojaksoilla Insinöörimatematiikka B1 248, Insinöörimatematiikka C1 209, Insinöörimatematiikka B2 251 ja Insinöörimatematiikka C2 216.

Testiryhmien opintojaksot järjestettiin käänteisen oppimisen keinoin ja verrokkiryhmän vastaavat opintojaksot puolestaan hybridimallilla, joka on kyseisillä toteutuksilla sisältänyt tasaisessa suhteessa yhdistelmän luentoja ja laskuharjoituksia. Verrokkiryhmän toteutuksissa oli myös sähköistä materiaalia. Kumpaakaan ryhmää ei siis opetettu täysin perinteisesti luennot, harjoitukset ja tentti -periaatteella, jossa arviointi koostuisi ainoastaan lopputentistä. Tosin opiskelijoilla oli mahdollista suorittaa kurssit pelkällä tentillä, jos näin on opettajan kanssa erikseen sovittu.

Opintojakson Insinöörimatematiikka 1 tavoitteena on tarjota opiskelijalle kykyä tulkita ja kirjoittaa reaalilukujen osajoukkoja käyttäen joukko-opin peruskäsitteitä, kuten leikkausta, yhdistettä, erotusta ja komplementtia. Opintojakson käytyään opiskelija pystyy hahmottelemaan alkeisfunktion ja muiden yksinkertaisten funktioiden kuvaajia, derivoimaan niitä ja tekemään päätelmiä kyseisen funktion kulusta ja ääriarvopisteistä. Funktion käyttäytymistä osataan arvioida myös raja-arvon avulla. Tarkoituksena on lisäksi osata muodostaa kompleksiluvusta eksponentti- tai koordinaattimuoto ja laskea kompleksilukujen peruslaskutoimituksia. Opiskelija osaa myös siirtyä kompleksilukuesitysten välillä sujuvasti, jakaa reaalikertoimisen polynomin tekijöihin ja laskea kompleksiluvun juuret. [34] Osaamistavoitteita ovat laskuteknisten ja matemaattisten sisältöjen lisäksi myös ratkaisun esittäminen kirjallisessa ja sanallisessa muodossa sekä matemaattisen ajattelun ja todistamisen taidot.

Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tavoitteena on, että opiskelija kykenee suorittamaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreilla peruslaskutoimituksia sekä tulkitsemaan näitä yksinkertaisemmassa avaruuden $\mathbb{R}^3$ tilanteessa, käyttämään pistetuloa vektorien kohtisuoruutta tutkiessaan, laskemaan vektorille projektion ja esittämään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suorien ja tasojen yhtälöt yleisessä, normaali- ja parametrimuodoissaan. Opiskelija pystyy ratkaisemaan Gaussin menetelmää käyttäen lineaarisen yhtälöryhmän ja osaa kirjoittaa ratkaisun vapaiden parametrien avulla äärettömän monen ratkaisun tilanteessa. Hän osaa laskea matriisien peruslaskutoimituksia, matriisien tulon, käänteismatriisin sekä neliömatriisin determinantin, ominaisarvot ja ominaisavaruuksien kannat. Opiskelija osaa selvittää vektoreiden lineaarisen riippumattomuuden ja vektoreiden virittämän joukon kannan. Opiskelija osaa myös selvittää kannan ortogonaalisuuden ja laskea avaruuden $\mathbb{R}^3$ tapauksessa vektoreille ristitulon ja skalaarikolmitulon. [35] Mekaanisen laskurutiinin ohella osaamistavoitteita ovat ratkaisun esittäminen kirjallisessa ja sanallisessa muodossa sekä matemaattisen ajattelun ja todistamisen taidot Insinöörimatematiikka 1 -opintojakson tapaan.

2.2 Matemaattisen osaamisen haasteita korkeakouluissa

Opintojensa aloittavien insinöörien matemaattinen osaaminen on heikentynyt Länsi- ja Pohjois-Euroopassa SEFI:n eli European Society for Engineering Educationin vuonna 2002 julkaiseman raportin nojalla. Vuonna 2002 on havaittu, että matemaattinen osaaminen on ollut laskussa viimeisen vuosikymmenen aikana. Opiskelupaikan saaneiden insinööriopiskelijoiden matemaattiset taidot ovat laskeneet, ja tämän lisäksi korkeakouluihin hakeneiden määrä on laskenut läpi Euroopan. Tämän seurauksena yhä heikoimmilla matemaattisilla valmiuksilla on saatu opiskelupaikka ja täten osallistuttu matematiikan opintojaksoille, jossa vaatimustaso on kuitenkin edelleen sama. [31, s. 3–5.]

Opettajat ovat havainneet saman ilmiön myös suomalaisissa yliopistoissa. Korkeakoulujen opettajat ovat ilmaisseet huolensa opintojensa aloittavien opiskelijoiden tason suuresta laskusta ja kertovat erityisesti algebran perusrutiinien olevan heikkoa. Suomalaiset ovat pärjänneet hyvin peruskoulutason matemaattista osaamista kartoittaneissa PISA-tutkimuksissa, mutta näissä testataan enemmän arkielämään liittyviä matematiikan taitoja ja matemaattista lukutaitoa, ja esimerkiksi algebran tai geometrian taidot eivät välity tutkimuksen tuloksista yhtä hyvin. [1, s. 4–5.]

Vaikkakin suomalaiset ovat pärjänneet hyvin PISA-tutkimuksissa, tukevat matemaattisen osaamisen heikkenemisen väitettä myös vuosina 2012, 2015 ja 2018 tehtyjen PISA12, PISA15 ja PISA18 -tutkimusten tulokset. Tutkimusten mukaan suomalaiset ovat edelleen OECD eli Organisation for Economic Co-operation and Development -maiden parhaimmassa päässä matemaattisessa osaamisessaan, mutta siitä huolimatta suomalaisnuorten matemaattinen osaaminen on heikentynyt tilastollisesti merkitsevästi vuodesta 2003 vuoteen 2012. Tutkimuksessa erinomaisten matematiikan osaajien osuus on vähentynyt 8 prosenttiyksikköä ja pudonnut lähelle OECD-maiden keskiarvoa. [19, s. 10–33.]

Vuoden 2012 PISA-tutkimuksen pääpaino oli nimenomaan matematiikan osaamisessa, minkä vuoksi sen tulokset ovat tämän tutkimuksen kannalta oleellisia ja myös hyvin huolestuttavia. Vuosien 2015 ja 2018 PISA-tutkimukset eivät painottuneet matematiikan osaamiseen, mutta näissäkin tutkittiin matemaattista osaamista. Vuonna 2015 matematiikan osaamisen keskiarvo mittauksissa laski edelleen, mutta ero vuoden 2013 mittaukseen ei enää ollut tilastollisesti merkitsevä. Kuitenkin matematiikan huippuosaajien osuus jatkoi tilastollisesti merkitsevää laskuaan. [41, s. 39–40.] Vuonna 2018 tehdyssä tutkimuksessa matematiikan osaamisen keskiarvo jatkoi laskuaan, mutta edelleenkään ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Kun tuloksia verrataan vuoden 2012 tuloksiin, on osaamisen tason lasku ollut tilastollisesti merkitsevää. [23, s. 29–33.] Osaamisen heikkeneminen on siis tasaantumassa, mutta 2000-luvun alusta alkanut osaamisen heikkeneminen heijastuu väistämättä myös nyt korkeakoulunsa opintojen aloittavien matematiikan osaamisen tasoon.

Matemaattisten perustaitojen heikkeneminen havaittiin myös Hervannassa entisellä Tampereen teknillisellä yliopistolla, nykyisellä Tampereen yliopiston Hervannan kampuksella, vuonna 2018 julkaistun tutkimuksen perusteella. Tutkimuksen mukaan osaaminen heikkeni tilastollisesti merkitsevästi aikavälillä 2013–2015. Kuitenkin tämän ajanjakson jälkeen matemaattisten perustaitojen osaaminen on ollut nousujohteista vuoteen 2017 saakka. Tutkimuksen tarkastelujakson, eli vuosien 2006–2017, aikana heikoiten pisteitä saatiin tehtävistä, jotka liittyivät trigonometriaan, derivointiin tai logaritmeihin. [26, s. 50–54.] Insinöörien matemaattisen osaamisen nostamiseksi jälleen tarvittavalle tasolle vanhan Tampereen teknillisen yliopiston tavoitteeksi matematiikan opetuksessa on asetettu tunnistaa sekä opiskelijoiden oppimisen vaikeudet matematiikassa että erilaiset oppijat ylipäätään ja kehittää opetusta vastaamaan näiden erilaisten oppijoiden tarpeita [16, s. 244]. Osaamisen heikkenemisen vuoksi on erityisen tärkeää kehittää opetusta osaamisen kehittymisen näkökulmasta ja tutkia matemaattisen osaamisen kehittymistä opintojensa aloittavien insinöörien joukossa, jotta voitaisiin löytää opetusmenetelmiä heikentyneen osaamisen kehittämiseksi tarvittavalle tasolle heti opintojen alkutaipaleella.

2.3 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, voidaanko opiskelijoiden matemaattiseen osaamisen kehittymiseen vaikuttaa käyttämällä käänteistä oppimista ja arviointia. Tarkoituksena on erityisesti syventyä tarkastelemaan matemaattista osaamista pidemmällä aikavälillä, koska käänteisen oppimisen vaikutuksia pidempiaikaiseen oppimiseen ei ole juuri tutkittu aiemmin [29]. Tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat:

1. Millaista matemaattista osaamista perustaitotestin, lopputestin ja opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja 2 tenttien vertailtavat tehtävät mittaavat?

2. Miten opiskelijoiden perustaitojen matemaattinen osaaminen on kehittynyt kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson aikana?

3. Millaista kehitystä Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2 opintojaksojen matemaattiselle osaamiselle tapahtuu opintojakson toteutuksen jälkeen?

Ennen tutkimuskysymyksien 2 ja 3 käsittelyä selvitetään ensimmäisen tutkimuskysymyksen avulla tehtävien mittaama matemaattinen osaaminen. Tämän jälkeen tarkastellaan kokonaisuutena opintojakson Insinöörimatematiikka 1 ja 2 osallistujien tuloksia sekä verrataan ryhmien tuloksia keskenään, jotta saadaan vastattua toiseen ja kolmanteen tutkimuskysymykseen. Tässä tutkimuksessa vertaillaan siis käänteisen oppimisen ja hybridimallin vaikutusta matemaattisen osaamisen kehittymiseen.

3 Tutkimuksen pedagoginen tausta

Kuten alaluvussa 2.2 esitettiin, on matemaattinen osaaminen heikentynyt Suomessa eri ikäluokkien keskuudessa ja myös opintojensa aloittavien insinöörien joukossa, minkä vuoksi on tärkeää löytää keinoja nostaa osaaminen takaisin tarvittavalle tasolle. Koska tämän tutkimuksen tarkoituksena on tarkastella insinöörimatematiikan opetusmenetelmiä matemaattisen osaamisen tukemisen kannalta, tulee matemaattisen osaamisen ja testi- sekä verrokkiryhmän opintojaksojen opetusmenetelmien taustalla olevaan teoriaan paneutua tarkemmin ja eritellä niiden osa-alueita.

Luvussa 3 perehdytään tutkimuksen kannalta keskeisiin pedagogisiin periaatteisiin ja käsitteisiin, joita ovat matemaattinen osaaminen, sulautettu, aktiivinen ja käänteinen oppiminen sekä käänteinen ja formatiivinen arviointi. Koska matemaattinen osaaminen on paljon muutakin kuin vastauksen oikeellisuutta, on erityisen tärkeää eritellä teoreettisesti sen eri ulottuvuuksia tutkittaessa matemaattisen osaamisen kehittymistä.

Verrokkiryhmän toteutus oli tietynlainen hybridimalli, missä opintojakson arviointi jakautui puoliksi jakson aikaiseen arviointiin ja puoliksi lopputenttiin. Heillä oli käytössään sähköistä oppimateriaalia ja heidän viikkoaikataulunsa koostuivat puoliksi luennoista ja puoliksi laskemisesta. Hybridimallissa yhdistyivät sulautetun ja aktiivisen oppimisen teoriat sekä formatiivinen arviointi. Testiryhmän opintojaksot toteutettiin käyttäen variaatiota käänteisestä oppimisesta, joten siihen liittyvää teoriaa ja mallin keskeisimpiä tavoitteita tulisi tarkastella unohtamatta arviointia, joka on sekin suuressa roolissa puhuttaessa oppimisesta.

3.1 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen voidaan Joutsenlahden [15, s. 99] mukaan käsittää hyvinkin laajana konseptina, josta on käytetty ajan saatossa, ja käytetään edelleenkin, vaihtelevia termejä eri yhteyksissä. Matematiikan didaktiikan tutkimuksissa 1990-luvulla on käytetty termiä matematiikan ymmärtäminen. Seuraavalla vuosikymmenellä ymmärtämisen paikkaa on vienyt käsite yksilön kompetensseista. Käsitteet eivät ole 2000-luvullakaan olleet täysin yhdenmukaisia, vaan esimerkiksi NAEP eli The National Assessment of Educational Progress -mittauksissa käytössä on termi matemaattinen suorituskyky ja PISA-mittauksissa puolestaan puhutaan matemaattisesta kompetenssista ja matemaattisesta taidosta. Tanskan opetusministeriön julkaiseman raportin pääkohtia käsittelevä teksti [28] käyttää PISA:n tapaan termiä matemaattinen kompetenssi. Tätä Nissin ja Højgaardin mallia matemaattiselle osaamiselle insinöörien matematiikan opetukseen ja oppimiseen suosittelee myös SEFI [32] vuonna 2013 julkaisemassaan raportissa.

Matemaattinen kompetenssi on matemaattisen tiedon ja ymmärryksen omistamista, matematiikan käyttämistä, mielipiteen muodostamista matematiikasta ja matemaattista aktiivisuutta erilaisissa konteksteissa. Matemaattinen kompetenssi voidaan määritellä myös valmiudeksi toimia tarkoituksenmukaisesti tietyntyyppisiä matemaattisia haasteita sisältävässä tilanteessa. Karkeasti jaoteltuna matemaattinen kompetenssi voidaan jakaa kahteen kategoriaan: kykyyn kysyä ja vastata sekä kykyyn käyttää matematiikan kieltä ja apuvälineitä. Ensimmäinen kategoria sisältää neljä kompetenssia, joita ovat matemaattisen ajattelun, ongelmanratkaisun, mallintamisen ja päättelyn kompetenssit. Jälkimmäinen kategoria sisältää vastaavasti neljä matemaattista kompetenssia: esittäminen, symbolinen ja formalisointi, vuorovaikuttaminen sekä apuvälineiden käyttäminen. [28, s. 49–51.] Kuvaan 3.1 on koottuna Nissin ja Højgaardin mallin matemaattisen osaamisen osa-alueet.

Matemaattisen ajattelun kompetenssi sisältää kyvyn esittää matematiikan luonteelle tyypillisiä kysymyksiä sekä tietää, minkä tyyppisiä vastauksia kysymykseen voidaan olettaa. Matemaattinen ajattelu on kykyä tunnistaa, ymmärtää ja käyttää matemaattisten konseptien eri ulottuvuuksia sekä erottaa toisistaan esimerkiksi matemaattiset määritelmät ja lauseet. Ongelmanratkaisukyvyn kompetenssilla tarkoitetaan kykyä havaita, formuloida ja eritellä erilaisia matemaattisia ongelmia sekä ratkaista niitä. Matemaattisen mallinnuksen kompetenssi kattaa alleen kyvyn analysoida olemassa olevia malleja ja toisaalta luoda itse malleja matematisoiden ongelman. Mallin luontiin liittyy kiinteästi taito arvioida sitä kriittisesti ja kommunikoida siitä toisten kanssa. Matemaattisen päättelyn kompetenssi tarkoittaa kykyä seurata ja arvioida matemaattista perustelua, tuottaa formaaleja matemaattisia perusteluja sekä ymmärtää, mitä matemaattinen todistus tarkoittaa. [28, s. 52–60.]

Kuva 3.1: Nissin ja Højgaardin matemaattisen osaamisen mallin eri kompetenssit. Kuvaan on merkitty sinisellä apuvälineiden ja matematiikan kielen käyttöä kuvaavat kompetenssit ja violetilla kompetenssit, jotka kuvaavat kykyä kysyä ja vastata matematiikkaan liittyen. [28, s. 49–51.]

Esittämisen kompetenssi on kykyä ymmärtää ja hyödyntää erilaisia matemaattisia esitysmuotoja sekä kykyä valita tilanteeseen sopiva muoto ja vaihtaa esittämisen muodosta toiseen. Symbolisen ja formalisoinnin kompetenssi tarkoittaa kykyä purkaa matematiikan symbolista ja formaalia kieltä luonnolliselle kielelle ja toisaalta muodostaa luonnollisesta kielestä symbolikieltä. Vuorovaikutuksen kompetenssiin kuuluu kyky ymmärtää ja tulkita matemaattisia ilmauksia ja tekstiä sekä ilmaista itseään matematiikan kautta niin kirjallisesti kuin sanallisestikin. Matemaattisten apuvälineiden käytön kompetenssin avulla kyetään käyttämään tarkoituksenmukaisia apuvälineitä matematiikassa, kun tiedetään niiden mahdollisuudet ja toisaalta rajoitteet. [28, s. 63–69.]

NAEP:n käyttämä matemaattinen suorituskyky määritellään niin, että se sisältää konseptuaalisen ymmärtämisen, proseduraalisen tiedon sekä ongelmanratkaisukyvyn. Nämä kolme suorituskyvyn ominaisuutta eivät ole eroteltavissa toisistaan, vaan kytkeytyvät toinen toisiinsa. Konseptuaalinen ymmärtäminen tarkoittaa kykyä operoida matemaattisilla käsitteillä ja näkyy esimerkiksi kykynä tunnistaa, tulkita ja soveltaa käsitteitä. Proseduraalinen tieto puolestaan on erilaisten matemaattisten ratkaisumenetelmien tiedostamista, tunnistamista ja hallintaa. Ongelmanratkaisukyvyssä konseptuaalinen ymmärtäminen ja proseduraalinen tieto yhdistyvät päättelyyn ja näiden tietojen esittämiseen. Matemaattinen suorituskyky kuvaa siis taitoa kerätä matemaattista tietoa ja käyttää sitä. [15, s. 93–94.]

PISA-tutkimuksissa taustalla olevaan teoreettiseen viitekehykseen kuuluvaan matemaattiseen kompetenssiin sisältyy useita ulottuvuuksia. Näitä ulottuvuuksia ovat opiskelijan matemaattisen ajattelun ja argumentoinnin taidot, ongelman asettelun ja toisaalta sen ratkaisun taidot, matemaattisen mallintamisen ja kielen taidot, laskutekniset ja ratkaisun esitysmuotoja koskevat taidot, apuvälineiden käyttötaidot sekä vuorovaikutustaidot. PISA-mittauksissa matemaattisen osaamisen on määritelty 15-vuotiaiden opiskelijoiden kyvyksi hyödyntää matemaattista tietotaitoaan suhteessa tuleviin haasteisiin. PISA-tutkimuksissa käytetään myös matemaattisten taitojen hierarkista jaottelua, missä taidot ovat helpommin mitattavissa olevissa kolmessa erillisessä taitoluokassa. Taitoluokkia ovat määritelmät sekä laskemisen ja suorittamisen taidot, asioiden välisten yhteyksien käyttäminen ja luominen ongelmanratkaisussa sekä matemaattinen ajattelu, oivaltaminen ja yleistäminen. [15, s. 95.] PISA-mittausten matemaattinen kompetenssi ja Tanskan opetusministeriön käyttämä matemaattinen kompetenssi vastaavat kutakuinkin toisiaan.

Joutsenlahden mukaan matemaattisen osaamisen käsite kattaa alleen sekä NAEP:n matemaattisen suorituskyvyn että PISA:n matemaattisen kompetenssin käsitteet. Joutsenlahti nojaa tutkimuksessaan Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin [18, s. 116] määritelmään matemaattiselle osaamiselle, minkä mukaan yksilön matemaattinen osaaminen koostuu viidestä eri osa-alueesta:

1. Käsitteellinen ymmärtäminen
2. Proseduraalinen sujuvuus
3. Strateginen kompetenssi
4. Mukautuva kompetenssi
5. Yritteliäisyys.

Myöskään näitä osa-alueita ei voida nähdä toisistaan erillisinä, vaan ne punoutuvat toisiinsa matemaattisen suorituskyvyn ulottuvuuksien tapaan. Käsitteellinen ymmärtäminen vaatii matemaattisten riippuvuuksien, operaatioiden ja käsitteiden sisäistämistä. Tällöin uudet käsitteet osataan liittää aiemmin opitun rakenteen joukkoon ja ymmärretään, millaisessa kontekstissa tietty matemaattinen ajatus on hyödyllinen. Käsitteellisen ymmärtämisen taito näkyy erityisen hyvin kykynä esittää matemaattisia tilanteita eri tavoin ja eritoten kykynä ymmärtää eri esityskeinojen hyödyt eri tilanteissa. [18, s. 116–124.] [15, s. 96–98.]

Proseduraalinen sujuvuus kuvaa taitoa käyttää ja soveltaa ratkaisumenetelmiä ja muita proseduureja järkevissä tilanteissa joustavasti ja tarkoituksenmukaisesti. Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus vastaavat aiemmin esitettyjä matemaattisen suorituskyvyn konseptuaalista ymmärtämistä ja proseduraalista tietoa. Proseduraalinen sujuvuus tukee käsitteellisen ymmärtämisen kehittymistä, ja ilman sujuvaa proseduurien käyttöä oppijan on haasteellista syventää matemaattista ajatteluaan ja ongelmanratkaisuaan. [18, s. 116–124.] [15, s. 96–98.]

Strateginen kompetenssi kuvastaa taitoa muodostaa matemaattisia ongelmia sekä esittää että ratkaista niitä. Tämä osaamisen ulottuvuus on siis vahvasti sidoksissa ongelmanratkaisukykyyn. Strategisen kompetenssin käyttö astuu kuvaan, kun proseduuri ongelman ratkaisemiseksi ei ole etukäteen selvä. Ongelman ratkaisemiseksi tulee osata soveltaa tiedossa olevia käsitteitä sekä erilaisia ratkaisumekanismeja tarkoituksenmukaisesti. [15, s. 96–98.] Strateginen kompetenssi antaa muun muassa valmiuksia nähdä eri esitysmuotojen välillä yhteisiä matemaattisia rakenteita. Strateginen kompetenssi on yhteydessä käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden kehittymiseen. Ei-rutiininomaisten tehtävien ratkaisemiseksi ja näiden strategioiden kehittymiseksi tulee ymmärtää ongelman käsitteitä ja toisaalta olla kokemusta rutiininomaisten ongelmien ratkaisuiden proseduureista. [18, s. 124–129.]

Mukautuva päättely voidaan määritellä kyvyksi käyttää loogista päättelyä apuna käsitteiden välisten yhteyksien löytämisessä, ongelmanratkaisun vaiheiden perustelussa ja todistamisessa [15, s. 98–99]. Matematiikan opiskelussa tärkeää on pystyä perustelemaan omat päätelmänsä ja ratkaisunsa vaiheet, mikä kehittää myös käsitteiden ymmärrystä. Apuna mukautuvassa päättelyssä voidaan tarvita konseptuaalista ymmärtämistä, proseduraalista sujuvuutta tai strategista kompetenssia. Mukautuva päättely ohjaa oppimisprosessia ja nivoo kaikki matemaattisen osaamisen alueet yhteen.

Matemaattisen osaamisen viimeinen ulottuvuus eli yritteliäisyys on matematiikan kokemista käyttökelpoisena ja arvokkaana, ja toisaalta uskoa omiin matemaattisiin kykyihin sekä ahkeruuden tuottamaan tulokseen opiskelussa. Opiskelijan on uskottava siihen, että matematiikka on hänen opittavissaan, ja hän voi kehittää omaa osaamistaan matematiikassa sinnikkään työn tuloksena. Opettaja on suuressa roolissa oppijan asenteen kehittymisessä matematiikkaa kohtaan. Opettajan tehtävänä on luoda matematiikan oppimiselle otollinen ja matematiikkaa kohtaan myönteinen ilmapiiri. Yritteliäisyys kehittyy muiden matemaattisen osaamisen haarojen kehittyessä ja toisaalta se auttaa muiden haarojen kehityksessä. Matematiikan oppimisessa kaikkien matematiikan osaamisen ulottuvuuksien tulisi kehittyä sidoksissa toisiinsa prosessinomaisesti, jotta onnistunutta oppimisesta voi tapahtua. [18, s. 129–133.] [15, s. 98–99.]

Kuva 3.2: Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden matemaattisen osaamisen viisi ulottuvuutta [15, s. 92–99].

Joutsenlahti on korvannut Kilpatrickin matemaattisen osaamisen määritelmän viidennen komponentin eli yritteliäisyyden Pehkosen termillä matematiikkakuva. Yksilön matematiikkakuva voidaan jakaa neljään uskomukseen, joita ovat uskomukset matematiikan oppimisesta, opettamisesta, matematiikasta itsestään ja oppijan omasta käsityksestä itsestään matematiikan opiskelijana. [13, s. 75.] Joutsenlahti on siis ottanut omaan määritelmäänsä mukaan Kilpatrickin neljä ensimmäistä ulottuvuutta ja yhdistänyt tähän viidenneksi osa-alueeksi matematiikkakuvan. Kilpatrcikin ym. ja Joutsenlahden malli matemaattiselle osaamiselle on tiivistettynä Kuvaan 3.2. Onnistumisen kierre matematiikassa on yhteydessä yksilön matematiikkakuvaan. Positiiviset oppimiskokemukset aikaansaavat positiivista asennetta ja mielleyhtymiä matematiikkaa kohtaan ja tätä kautta opiskelija panostaa ja käyttää omaa aikaansa yhä enemmän opintoihin. Onnistumisen kierteellä on myös vastaparina epäonnistumisen noidankehä, jossa epäonnistuminen johtaa negatiivisiin tuntemuksiin ja lopulta matematiikan välttelyyn. Yksilön matematiikkakuvalla ja positiivisten kokemusten saavuttamisella on siis suuri merkitys matemaattiselle osaamiselle. [33, s. 430.]

Kilpatrickin määritelmän viimeinen kohta korostaa työn tuottamaa tulosta myös matematiikan opiskelussa. Hänen mukaansa matemaattiseen osaamiseen kuuluu taito nähdä matematiikka arvokkaana ja hyödyllisenä, mutta Joutsenlahti korostaa tässä kohtaa osaamisen koostuvan oppijan sisäisestä kuvasta ja uskomuksista matematiikasta eikä matematiikan näkemistä arvokkaana pidetä arvona sinänsä. Toisaalta opiskelijan näkemys matematiikasta, sen oppimisesta ja opetuksesta sisältävät näkemyksen parhaimmillaan siitä, että matematiikka on käyttökelpoista, arvokasta ja sinnikäs työ tuottaa tuloksia myös matematiikan osaamisen kehittymisessä eli opiskelija uskoo omiin taitoihinsa ja kykyihinsä oppia. Tässä tutkimuksessa peilataan matemaattista osaamista Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden sekä toisaalta Nissin ja Højgaardin määritelmiin.

3.2 Aktiivinen ja sulautettu oppiminen

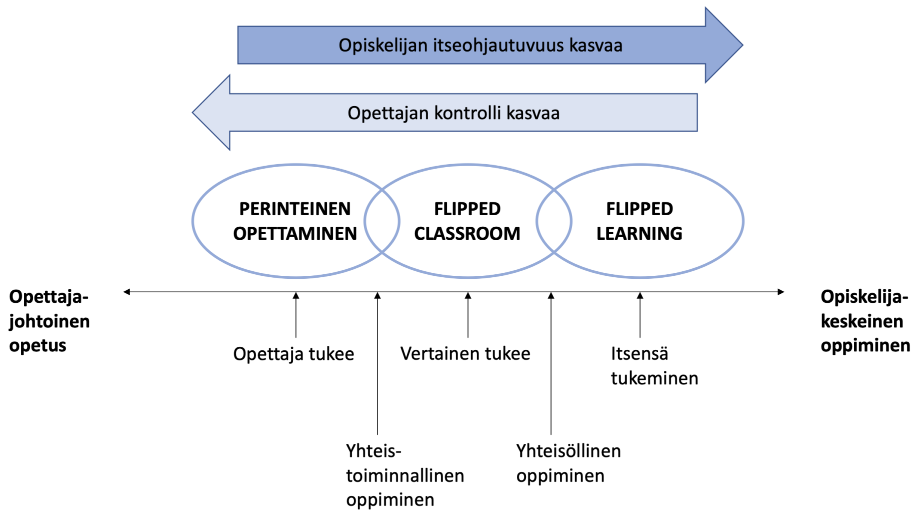
Aktiivisen oppimisen tärkein päämäärä on opiskelijan roolin muuttaminen passiivisesta vastaanottajasta aktiiviseksi oman oppimisprosessinsa rakentajaksi. Aktiivisen oppimisen ajatus on saanut kannatusta yliopistomaailmassa passiivisen luento-opetuksen paikalle. Opiskelijan roolia muutetaan aktiivisemmaksi yhteisöllisen oppimisen keinoin. Yhteisölliseen oppimiseen kuuluu yhdessä työskentely yhdessä asetettujen oppimistavoitteiden saavuttamiseksi. Tutkimusten mukaan aktiivisen oppimisen menetelmällä opiskelijoiden oppimistulokset ovat parantuneet, heille on kehittynyt positiivisempi kuva opiskeltavasta aiheesta ja näiden lisäksi heidän käsityksensä itsestään akateemikkona ja asiantuntijana ovat vahvistuneet. [14, s. 29.]

Aktiivisessa oppimisessa tulee keskittää huomio opiskelijoiden taitojen kehitykseen, omiin asenteisiin ja arvoihin tiedon siirtämisen sijaan. Jotta opiskelijat saadaan aktiiviseksi osaksi oppimista, tulee heidän ratkaista ongelmia, keskustella tai muuten aktiivisesti työskennellä oppimisen mahdollistamiseksi. Tärkeimpiä keinoja aktivoitumisen kannalta ovat opiskelijan osallistuminen analyysiin ja arviointiin, koska ne haastavat opiskelijan ajattelun taitoja. Aktiivinen oppimisen malli tukeekin sisällön oppimisen lisäksi ajattelun taitojen kehitystä tavallista luentotyyliä paremmin. [3, s. 5, 18–19.]

Toinen korkeakouluissa suosiota kasvattanut opetusmenetelmä on sulautettu oppiminen [9, s. 4]. Sulautetulla oppimisella tarkoitetaan opetustilassa kasvotusten tapahtuvan oppimisen ja verkossa tapahtuvan oppimisen yhdistelmää. Menetelmällä voidaan saavuttaa sekä lähiopetuksen että verkkototeutuksen hyödyt: lähiopetuksessa muodostuva yhteisö ja välitön vuorovaikutus yhdistyvät rajattomaan tiedonsaantiin ja ajasta sekä paikasta riippumattomaan opiskeluun. [8, s. 96–97.] Sulautetulla oppimisella pyritään tukemaan opiskelijan aktiivista ja itseohjautuvaa oppimista. Lähiopetuksen ja verkkototeutuksen yhdistämisen hyöty näkyy opiskelun joustavuutena, jolloin opiskelu ei ole niin suurelta osin ajasta tai paikasta riippuvaa [40, s. 11].

3.3 Käänteinen oppiminen

Käänteinen oppiminen sisältää joitakin aktiivisen ja sulautetun oppimisen periaatteita, mutta korostaa näiden lisäksi muitakin osa-alueita, mikä tekee siitä oman menetelmänsä. Suomen kielessä termi käänteinen oppiminen on siinä mielessä ongelmallinen, että sitä käytetään tilanteissa, joissa oikeastaan tarkoitetaan joko käsitettä FL eli Flipped learning tai FC eli Flipped classroom. Koska ero käsitteiden FL ja FC välillä on merkittävä, on tärkeää täsmentää niiden takana olevia periaatteita. Karkeasti jaoteltuna FC on opetusmetodi, jossa opetus muuttuu käytännön tasolla niin, että opetustilassa tapahtunut opetus ja kotitehtävien teko vaihtavat paikkaa. FL on puolestaan ideologia, jossa tuetaan opiskelijan vastuunottoa omasta oppimisestaan sekä uskotaan hänen haluunsa ja kykyynsä oppia. [12, s. 20.] [6, s. 1.] Käsitteiden FL ja FC välisiä eroavaisuuksia ja toisaalta eroa perinteiseen opetukseen on havainnollistettu Kuvassa 3.3. Kääntteisen oppimisen teoreettisessa tarkastelussa on otettava huomioon myös sen taustat. Käänteisen oppimisen konsepti ei ole peräisin teoreettisista lähtökohdista tai malleista, vaan sen käyttö on yleistynyt ja muotoutunut käytännön kokeilujen seurauksena [37, s. 1].



Kuva 3.3: Toivolan ja Silfverbergin kuvaus perinteisen opetuksen, Flipped classroom ja Flipped learning -mallien eroavaisuuksista [38, s. 2].

FC kääntää perinteisen oppimistapahtuman toiminnot päinvastoin, eli sisällön oppiminen tapahtuukin nyt luokkahuoneen ulkopuolella mieluiten verkkoympäristössä, ja itse opetustilassa opettajan kanssa aika käytetään aiheen parissa yhdessä työskennellen [10, s. 88]. Flipped classroom -mallin kehittäjinä pidetään coloradolaisia kemianopettajia Jonathan Bergmannia ja Aaron Samsia.

Kaksikko videoi kemian oppituntinsa vuonna 2007 seuraavan vuoden opetuskäyttöä varten. Videoiden kuvaamisen jälkeen sisällön opettamisesta säästynyt aika voitiin käyttää opiskelijoiden taitotason ja oppimisen arviointiin, ja tätä kautta opetuksen kehittämiseen. Bergmannin ja Samsin metodissa silti keskeisintä oli tiedon siirto ajattelutavan muutoksen sijaan. [12, s. 20–21.] FC-malli ei siis taannut oppimiskulttuurin muuttumista opettajakeskeisestä opiskelijalähtöisempään oppimisen kulttuuriin, sillä se keskittyi lähinnä oppimis- ja opetusympäristön fyysisiin muutoksiin [10, s. 88].

Ideologiana FL korostaa opiskelijakeskeistä oppimiskulttuuria, jossa opettaja toimii ohjaajana, joka rakentaa opetuksen perustaen sen oppilaan lähtökohtiin oppia yksilöinä [37, s. 1–8]. Toivolan ja Silfverbergin [38, s. 1–2] mukaan FL-mallin tarkoituksena on muuttaa pedagogista käsitystämme opettamisesta ja oppimisesta. Tärkeitä lähtökohtia FL-malliin ovat yhteisöllinen oppiminen sekä oppijan oman aktiivisuuden, autonomian tunteen ja itseohjautuvuuden kasvattaminen sekä tukeminen. Humalojan, Peuran ja Toivolan kirjassa [12, s. 22] käsite Flipped learning liitetään sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen yhteyteen, mikä korostaa toisaalta oppimisen yhteisöllisyyttä ja toisaalta sen yksilöllisiä piirteitä. Heidän mukaansa FL ei ainoastaan korosta oppimisen yhteisöllisyyttä ja yksilöllisyyttä, vaan myös yhdistää ne. Vygotskyn [43, s. 90] mukaan oppiminen herättää useita yksilön sisäisiä prosesseja, mutta nämä prosessit käynnistyvät vasta vuorovaikutuksen kautta. Prosessien ulkoistuessa vuorovaikutuksen seurauksena niistä tulee osa yksilön osaamista. Vygotsky korostaa, että oppiminen ja kehitys eivät ole sama asia, vaikka oppiminen voi johtaa kehittymiseen.

Käänteinen oppiminen yhdistetään usein Bergmanniin ja Samsiin, jotka olivat kehittämässä Flipped classroom -metodia, mutta Flipped learning -mallin pioneerina voidaan pitää Harvardin fysiikan professoria Erik Mazuria, jonka työ 1990-luvulta lähtien on ollut merkittävää FL-mallin kehittymiselle. Itse käsitteen Flipped learning takana on FLN eli Flipped Learning Network -yhteisö. [12, s. 21.] FLN:n mukaan opettajan on noudatettava neljää seuraavaa ohjenuoraa päästäkseen lähemmäs FL-toteutusta. Ohjeet ovat:

1. Joustavat oppimisympäristöt
2. Erilainen oppimiskulttuuri
3. Tarkoituksenmukainen sisältö
4. Opettaja ammattimaisena kouluttajana.

Opettajan tulee siis tarjota opiskelijoilleen joustavia oppimisympäristöjä, erilaista oppimiskulttuuria, tarkoituksenmukaista sisältöä ja toimia ammattimaisena kouluttajana. Joustavan oppimisympäristön tarjoamisella voidaan tarkoittaa fyysisen opetustilan järjestämistä joustavasti yhdessä tai yksin työskentelyyn sopivaksi. Joustavien tilojen ansiosta opiskelijan on mahdollista valita, missä ja miten hän tahtoo opiskella. Laajemmin joustavuudella voidaan tarkoittaa opettajan kykyä olla joustava omissa odotuksissaan arvioidessaan opiskelijan oppimista ja opiskelijan suunnitellessa aikatauluaan.

FL-mallissa tarkoituksena on pyrkiä opiskelijakeskeisempään oppimiskulttuuriin, jossa kontaktiopetuksessa tarkastellaan aiheita syvällisemmin ja luodaan monipuolisia oppimista mahdollistavia tilanteita. Uudenlaiseen oppimiskulttuuriin kuuluu opiskelijan aktiivinen rooli tiedonrakentajana, kun hän arvioi omaa oppimistaan. Opettaja tarjoaa kontaktiopetuksessa opiskelijoille tarkoituksenmukaista sisältöä, jotta he omaksuisivat opiskelijalähtöisiä ja aktiivisia oppimisstrategioita ja jotta heidän käsitteellinen ymmärryksensä sekä proseduraalinen sujuvuutensa paranisivat. Opettajan rooli on toimia ammattimaisena kouluttajana eli havainnoida opiskelijoita, tarjota heidän oppimisensa kannalta hyödyllistä palautetta ja arvioida heidän kehittymistään. Tämä vaatii opettajalta reflektoivaa otetta työhönsä, yhteisopettajuutta muiden opettajien kanssa sekä kykyä vastaanottaa rakentavaa palautetta ja sietää tietynlaista hallittua kaaosta opetustilassa. [6, s. 2.]

Oppimisen yhteisöllisen luonteen vuoksi yhteisöllinen oppiminen on FL-mallin keskiössä. Yhteisöllinen oppiminen tarkoittaa toimintamallia, jossa vähintään kaksi työskentelee yhdessä oppiakseen jotakin. Yhteistoiminnallista oppimista käytetään toisinaan yhteisöllisen oppimisen synonyyminä. Yhteistoiminnallinen oppiminen kuitenkin eroaa yhteisöllisestä oppimisesta niin, että siinä työskennellään yhdessä jonkin tuotoksen aikaansaamiseksi ja on siten pikemminkin työtapa. [12, s. 52.] Yhteisöllinen oppiminen perustuu vapaaehtoiseen yhteistyöhön muiden kanssa, jolloin osallisten vuorovaikutustaidot kasvavat [37, s. 1–4] [2, s. 27–28].

Lisäksi vuorovaikutus itsessään johtaa syvempään ymmärrykseen aiheesta, ja sillä on positiivinen vaikutus oppimisen laatuun ja määrään [37, s. 1–4]. Opiskelu itsenäisesti ei suinkaan tarkoita oppimista yksin, vaan itsenäisessä opiskelussa korostuu yhteistyö vertaisten kanssa, mitä yhteisöllinen oppiminen ja opettajan ohjaaja-asema palvelevat [38, s. 3]. Yhteisöllisessä oppimisessa pyritään yhdessä oppimiseen eikä ainoastaan ennalta määrätyn tuotoksen aikaansaamiseksi, mikä usein on ryhmätöiden ja yhteistoiminnallisen oppimisen keskiössä [38, s. 7]. Yhteisöllisen oppimisen lisäämisen opetukseen on havaittu nostavan opiskelijoiden testi- ja tenttituloksia verrattuna tavalliseen luento ja harjoitukset -malliin Norjassa [7]. Käänteisellä oppimisella on saatu vastaavanlaisia tuloksia myös Yhdysvalloissa oppimistulosten ollessa verrokkiryhmiä parempia [25, s. 598].

Opetuksessa tarkoituksena on pystyä toimimaan yksilön lähikehityksen vyöhykkeellä eli pyrkiä toimimaan opiskelijan potentiaalisen osaamisen alueella, jossa voidaan toimia vertaistuen tai ohjauksen avulla. Lähikehityksen vyöhyke on tila, jossa oppiminen on ylipäätään mahdollista ja jossa opettaja on oppijalle tarpeellinen. [12, s. 40]. Vygotsky [43, s. 86] määrittelee tutkimuksissaan lähikehityksen vyöhykkeen todellisen kehitysasteen ja potentiaalisen kehityksen tason väliseksi etäisyydeksi. Todellisen kehitysasteen selvittämisessä mitataan itsenäistä ongelmanratkaisukykyä. Potentiaaliseen kehityksen tasoon päästään kiinni, kun ongelmanratkaisukykyä arvioidaan siten, että ongelman ratkaisuun saadaan aikuisen tai muun osaavamman apua. Kun opiskelijaa ohjataan hänen lähikehityksen vyöhykkeellään, puhutaan oikea-aikaisesta tukemisesta. [12, s. 57.]

Oikea-aikaisen tukemisen puolesta puhuvat myös Bergmann ja Sams [2, s. 25]. Oikea-aikainen tukeminen voidaan jakaa kolmeen tasoon tuen antajan mukaan: opettajan ohjaamiseen, vertaisen ohjaamiseen ja oman itsensä ohjaamiseen. Oppimaan oppinut yksilö on kykenevä ohjaamaan myös itseään. [11, s. 134–137.] Lähikehityksen vyöhykkeellä toimiessaan opiskelija saa onnistumisen kokemuksia tasolta, johon hänen omat taitonsa eivät vielä yksin riitä, kun hän kurottaa kohti potentiaalista osaamistaan tuen avustamana. Vyöhykkeen tunnistamiseksi opettajan on tehtävä paljon työtä, jotta hän tunnistaa kunkin opiskelijan kohdalla sen, mitä hän jo ennestään taitaa. FC-menetelmän avulla opettajan on mahdollista oppia tuntemaan opiskelijansa paremmin lisääntyneen vuorovaikutuksen kautta, kun aika opettajajohtoisista opetustilanteista käytetäänkin opiskelijoiden kanssa työskentelyyn [2, s. 26].

Taitotason kartuttamisessa hyvänä apuna on opiskelijan oma kyky arvioida taitojaan ja osaamistaan, mikä myös kehittyy FL-metodia käytettäessä niin, että opiskelija tunnistaa yhä realistisemmin omat kykynsä matematiikassa. [37, s. 1–4.] Opiskelija tulee myös tietoisemmaksi omasta oppimisprosessistaan reflektoidessaan omaa kehitystään ja osaamistaan [38, s. 3]. Lähikehityksen vyöhykkeellä toimiminen mahdollistaa opiskelijan omatahtisen etenemisen [12, s. 35]. Tällöin opiskelijat etenevät sisällön kanssa kukin eri tahtiin taitotasonsa mukaisesti. Omatahtinen eteneminen ja lähikehityksen vyöhykkeellä toimiminen eriyttävät opiskelijoita yksilöllisesti, ja heterogeenisessa ryhmässä opiskelijat voivat edetä hyvin eri tahtiin [2, s. 28.].

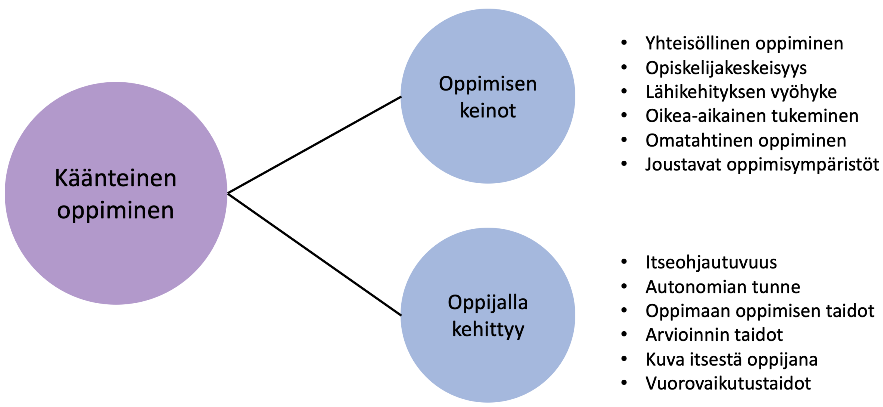
Opiskelijan tahtiin edettäessä sisällölliset osa-alueet kenties hallitaan paremmin, vaikka kaikkea ei ehdittäisikään oppia. Sisällön ymmärtäminen syvällisemmin tukee yksilön positiivista minäkäsitystä itsestään oppijana paremmin ja vahvistaa hänen matematiikkakuvaansa tukien näin matemaattisen osaamisen kehitystä [12, s. 42]. Opettajan tahtiin eteneminen ja tämän tarjoaman tiedon kopioiminen ja soveltaminen on jäljittelyä, mikä on itse asiassa mahdollista vain, jos tieto on jo opiskelijan kehitystasolla. Jos opettaja ratkaisee taululla opiskelijan tasoon nähden turhan korkeaa matematiikkaa, ei opiskelija pysty ymmärtämään ratkaisua. [43, s. 88] Nämä tulokset puhuvat vahvasti omatahtisen oppimisen ja oikea-aikaisen tukemisen puolesta.

FL-mallissa nojataan opiskelijan omaan haluun oppia, sillä vastuu oppimisprosessista on suuremmalta osin opiskelijalla itsellään. Tärkeimpiä tavoitteita käänteisessä oppimisessa aineenhallinnan lisäksi ovat itseohjautuvuuden ja oppimaan oppimisen taitojen lisääntyminen. Näitä taitoja varten opiskelijan on ymmärrettävä, että oppiminen vaatii omaa aktiivista osallistumista. Oppimista ja matemaattisen osaamisen karttumista ei tapahdu ainoastaan siten, että on fyysisesti läsnä oppitunnilla, jossa opettaja jakaa omat tietonsa koko ryhmälle säädettyyn yhteiseen tahtiin. [37, s. 1–4.]

Itseohjautuvuus määritellään yksilön kyvyksi arvioida ja toisaalta ohjata omaa oppimistaan. Itseohjautuvuuden kehittymiseksi opiskelijan tulee ensin olla tietoinen omasta oppimisprosessistaan [12, s. 43–46]. Tutkimusten mukaan opiskelijan itseohjautuvuutta tukeva opetus kehittää hänen taitojaan tavoitteiden asettamisessa, ajanhallinnassa, suunnittelussa, avun hankkimisessa ja tietysti itseohjautuvuudessa, minkä lisäksi oppimistulokset paranevat [20]. Opiskelijaryhmän heterogeenisuus tukee myös itseohjautuvuutta ja sen kehitystä [12, s. 40.]. Tämä johtuu esimerkiksi siitä, että itseohjautuvuuden kehittymisessä keskeisiä työkaluja ovat itse- ja vertaisarvioinnit, joita ryhmän heterogeenisuus rikastaa [37, s. 1–4].

Vastuun ottamiseen omasta oppimisesta voidaan liittää myös autonomian käsite. Autonomia määritellään toiminnaksi, jonka yksilö valitsee ja josta hän on itse vastuussa. Autonomisen oppijan tulisi pystyä johtamaan, suunnittelemaan ja päästä vaikuttamaan omaan oppimisprosessiinsa. FL-mallissa pyritään kasvattamaan opiskelijoista autonomisia oppijoita. [38, s. 4.] Vastuun kasvaminen voi olla toisaalta myös osasyy siihen, että kaikki opiskelijat eivät opi kaikkea sisältöä, mutta näin käy perinteisessä perinteisessä opettajajohtoisessa opetuksessakin, jossa opettaja sanelee etenemistahdin ryhmän mukaan eikä edetä yksilön kyvyn tai halun mukaan. [37, s. 1–4.]

Kuvaan 3.4 on tiivistetty käänteisen oppimisen käyttämät keinot ja toisaalta sen avulla saavutettavat hyödyt opiskelijan näkökulmasta. Huomataan, että käänteisen oppimisen korostamat oppimisen yhteisöllinen ja yksilöllinen ulottuvuus todella nivoutuvat yhteen ja tukevat toisiaan sekä oppimisen keinoissa että opiskelijan kehityksessä. Keinot ja menetelmän hyödyt ovat nekin vuoropuhelussa keskenään. Esimerkiksi opiskelijaryhmän heterogeenisuus yhteisöllisen oppimisen kautta tukee yksilön itseohjautuvuuden kehittymistä.



Kuva 3.4: Käänteisen oppimisen keinot ja sen avulla opiskelijalla kehittyvät taidot.

Toivolan ja FLN:n teoretisoinnit poikkeavat osittain toisistaan, mutta toisaalta sisältävät hyvin paljon samoja elementtejä. Molemmat nostavat esiin, että FL on oppimisen kulttuuri, jossa korostetaan opiskelijan omaa aktiivisuutta ja opettajan roolia parhaiden mahdollisten oppimistilanteiden luojana. Opettaja tukee opiskelijaa, antaa hänelle palautetta, on joustava ja ennen kaikkea poistuu itse johtajan paikalta antaen opiskelijalle tilaa ottaa vastuuta omasta oppimisprosessistaan.

FLN:n mallissa on nostettu esiin joustavat oppimisympäristöt. Toivola ei erikseen kehota joustaviin fyysisiin oppimisympäristöihin, vaan haluaa tarjota opiskelijalle oikeuden esimerkiksi valita, mitä kontaktiopetuksessa haluaa opiskella. Tällainen vapaus vaatii opettajalta joustavuutta. Toivola ei myöskään korosta oppimateriaalin tärkeyttä, joka on FLN-mallin käänteisen oppimisen yksi osa-alue. Tarkoituksenmukaisella materiaalilla opiskelija saa FLN:n mukaan kaiken mahdollisen hyödyn irti opetustilassa käytetystä ajasta. Kenties tärkeintä materiaalissa ja opetuksen sisällössä olisi sen monipuolisuus ja mahdollisuus omatahtiseen etenemiseen ja yksilöllisempiin oppimisprosesseihin. Toivolan mallissa kontaktiopetuksessa suurin hyöty oppimiselle saadaan yhteisöllisen oppimisen, itse- ja vertaisarviointien sekä oikea-aikaisen tukemisen keinoin, kun toimitaan yksilön lähikehityksen vyöhykkeellä.

FL-mallin voidaan katsoa vahvistavan opiskelijan konseptuaalista ajattelua ja kehittävän hänen matematiikkakuvaansa. Opiskelijat kehittyvät oman ongelmanratkaisuprosessinsa esittämisessä, minkä vuoksi myös prosessit ongelmien ratkaisemiseksi kehittyvät. Opiskelijoiden ymmärrys omasta osaamisestaan vankentuu, ja he saavuttavat syvemmän tason myös matemaattisen sisällön hallinnassa. [38, s. 7.] Kun peilataan käänteisen oppimisen periaatteita matemaattisen osaamisen osa-alueisiin (kts. alaluku 3.1), niin huomataan, että käänteinen oppiminen tukee useita eri ulottuvuuksia. Käänteisellä oppimisella voidaan edellisen perusteella vaikuttaa ainakin yksilön käsitteelliseen ymmärrykseen, proseduurien sujuvuuteen ja matematiikkakuvaan. Koska ongelmanratkaisukyky on yhteydessä strategiseen kompetenssiin ja mukautuvaan päättelyyn, voidaan metodilla vaikuttaa myös näihin osa-alueisiin matemaattisessa osaamisessa.

3.4 Formatiivinen ja käänteinen arviointi

Jos oppimiskulttuuria ollaan muuttamassa opiskelijakeskeisempään suuntaan käänteisen oppimisen keinoin, on käsitystä arvioinnista myös arvioitava kriittisesti ja muutettava sitä uuden oppimiskulttuurin periaatteiden mukaan. Onhan arviointi hyvin merkittävä osa oppimisprosessia ja arviointikulttuuri tulee nähdä oppimiskulttuurin kehittämisen tukena. Arviointikulttuurin muutoksella Toivola [37, s. 5] tarkoittaa artikkelissaan muutosta, jossa edetään kohti oppijan ongelmanratkaisukyvyn ja ajattelun kehittymisen arviointia. Lisäksi keskeistä on muuttaa arviointiin liittyviä mielleyhtymiä ja päästä pois ajatuksesta, että arviointi olisi arvostelua tai lopullinen tuomio, minkä jälkeen kehitykselle ei ole sijaa. Tässä muutoksessa apuna ovat formatiivinen ja käänteinen arviointi.

Oppimista edistävä arviointi on sellaista, minkä avulla opiskelijan usko omiin kykyihinsä oppia kasvaa, ja hän tiedostaa vastuun, joka tehdyillä valinnoilla on. Arvioinnilla tulee keskittää opiskelijoiden huomio siihen, että he voivat omalla aktiivisuudellaan ja toiminnallaan vaikuttaa omaan oppimiseensa. [36, s. 21, 29, 55.] Oppimisen arvioinnin tulisi olla sekä summatiivista että formatiivista. Summatiivisella arvioinnilla pyritään todistamaan tapahtunut oppiminen opetussuunnitelman tavoitteisiin nojaten. Formatiivista arviointia käytetään edistämään yksilön oppimista. Formatiivinen arviointi tapahtuu oppimisen aikana, mistä kumpuaakin sen luonne ohjata ja kannustaa opiskelijaa oppimaan. Formatiivisesta arvioinnista käytetään joskus nimitystä jatkuva arviointi sen jatkuvan luonteen vuoksi. Bergmannin ja Samsin mukaan on opettajan vastuulla jatkuvasti arvioida opiskelijoiden edistymistä ja tarjota heille välitöntä oppimista tukevaa palautetta, kun opettajat käyvät dialogia opiskelijoiden kanssa [2, s. 87].

Kun arviointia halutaan kehittää, on tärkeää pohtia, kuinka opiskelijan kykyä arvioida ja kehittää omaa toimintaansa saamansa palautteen perusteella voidaan tukea. Tämä on keskeistä siksi, että kyky arvioida omaa osaamistaan suhteutettuna asetettuihin tavoitteisiin johtaa myös parempiin oppimistuloksiin. Formatiivisen arvioinnin tavoitteena on yksilötasolla tunnistaa opiskelijan oppimisen ongelmat ja toisaalta tunnistaa opiskelijan lähikehityksen vyöhykkeen sijainti, missä käänteisen oppimisen periaatteiden mukaan oppijan tulisi pyrkiä työskentelemään kehittymisen aikaansaamiseksi. Koska summatiivinen loppukoe mittaa lähinnä opiskelijan kykyä muistaa opettajan luomia mekaanisia malleja tehtävien tekoon, ei se juurikaan palvele käänteisen oppimisen tavoitteita. [37, s. 3.] Summatiivinen arviointi voi kuitenkin toimia hyvänä mittarina osaamisen minitason tarkastamiseen [2, s. 88].

Käänteisessä arvioinnissa käsitys arvioinnista painottuu nimenomaan formatiivisen arvioinnin puolelle. Käänteisen arvioinnin oikeuttaminen ja perustelu pohjautuvat käänteisen oppimisen tapaan vahvasti käytäntöön. [36, s. 9–11.] Koska käänteinen oppiminen korostaa sekä oppimisen yhteisöllisyyttä että sen yksilöllisiä piirteitä, ei tällaisen oppimiskäsityksen vallitessa arvioinnilla voida pyrkiä samanlaiseen objektiivisuuteen tai reiluuteen kuin summatiivisessa loppukokeessa. Käänteisessä arvioinnissa tarkoituksena ei ole myöskään vertailla opiskelijoita keskenään, joten arvioinnin tulosten ei tarvitsekaan olla täysin vertailukelpoisia. Koska omatahtisessa oppimisessa keskeistä on omien tavoitteiden asettaminen ja niiden tavoittelu, niin ei ole järkevää vertailla, kuinka paljon kukin opiskelija eroaa opettajan asettamasta täydellisyydestä. Tämän sijaan osaamista on verrattava opiskelijoiden omiin tavoitteisiin. [36, s. 23.]

Käänteisessä oppimisessa keskeisen tavoitteen eli opiskelijan itseohjautuvuuden kehitystä tuetaan arvioinnissa itse- ja vertaisarvioinneilla. Itsearvioinnin tarkoituksena on pohtia opiskelijan oppimiselleen asettamien tavoitteiden suhdetta hänen tekemiinsä valintoihin. Vertaisarvioinnilla pyritään arvioinnin ja oppimisen yhteisöllisyyteen. Vertaisen auttaminen ja hänelle palautteen antaminen haastaa samalla omaa osaamista ja ymmärrystä aiheesta. Keskeistä vertaisarvioinneissa on tukea toisen oppimista kannustavassa hengessä ilman arvostelua. Arvioinnissa on onnistuttu parhaiten silloin, kun se on yhteistyötä, vuorovaikutusta ja ennen kaikkea yhdessä oppimista. [36, s. 32–33.]

Kuva 3.5: Käänteisen arvioinnin tavoitteet [36, s. 5–7].

Käänteisen arvioinnin tavoitteet voidaan tiivistää kolmeen tavoitteeseen Kuvan 3.5 tapaan. Ensimmäinen tavoite on, että arvioinnilla ei pyritä sellaiseen arviointikulttuuriin, jossa mitataan vain lyhytaikaisen muistin kapasiteettia muistaa asiat ja tyhjentää kaikki tieto kokeeseen, jonka jälkeen aiheesta ei muisteta mitään. [37, s. 5–7.] Tämän sijaan opiskelijoita rohkaistaan tekemään virheitä, mitä kautta kehitystä voi tapahtua lähikehityksen vyöhykkeellä. Onhan matemaattinen osaaminen erityisesti ongelman havaitsemista ja uskallusta tarttua siihen [36, s. 103]. Toinen tavoite arviointimallin muutoksessa on auttaa opiskelijaa tiedostamaan mahdollisimman realistisesti oma osaamisensa ja tukea tätä kautta positiivisen minäkuvan kehitystä itsestä oppijana eli tukea positiivisen matematiikkakuvan kehittymisessä. Kolmanneksi arvioinnilla pyritään kannustavaan ja oppimisen kannalta myönteiseen ilmapiiriin, jossa vertaistuella on suuri merkitys oppimiselle. [37, s. 5–7.]

4 Tutkimuksen matemaattinen tausta

Tässä luvussa perehdytään tarkemmin matriisilaskentaan, joka kuuluu opintojakson Insinöörimatematiikka 2 sisältöihin. Matriisilaskenta on korkeakouluopinnot aloittavalle opiskelijalle täysin uusi matematiikan osa-alue, minkä vuoksi sen lähempi tarkastelu ja aihepiirin matemaattisen osaamisen kehityksen kartoittaminen on erityisen tärkeää. Matriisien avulla voidaan esimerkiksi ratkaista yhtälöryhmiä ja havainnollistaa useita ulottuvuuksia sisältäviä ilmiöitä, mitkä ovat oivia työkaluja insinööreille.

Jotta matriisien ominaisuuksia osattaisiin hyödyntää tarkoituksenmukaisesti, tulee ensin tutustua niihin liittyviin käsitteisiin. Alaluvuissa 4.1, 4.2 ja 4.3 määritellään myöhemmin tarvittavia käsitteitä ja muutamia ominaisuuksia kääntyvien matriisien lauseen ja dimensiolauseen ymmärtämiseksi. Tarvittavia käsitteitä ja ominaisuuksia selvennetään niitä hyödyntävien esimerkkien avulla. Kääntyvien matriisien lause ja dimensiolause ovat toisen insinöörimatematiikan kurssin kannalta keskeisiä, ja ne esitellään alaluvussa 4.4 lauseita soveltavien esimerkkien kanssa.

4.1 Matriisit ja vektorit

Kääntyvien matriisien lauseen väitteiden ja dimensiolauseen ymmärtämiseksi on aluksi määriteltävä matriiseihin ja vektoreihin liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia. Joitakin matriisilaskennan käsitteitä oletetaan jo tunnetuksi. Esitietoina tarvittavia käsitteitä ovat identiteettimatriisi, vektoriavaruus ja lineaarinen yhtälöryhmä.

Tutustutaan ensin tarkemmin siihen, mitä matriisilla tarkoitetaan. *Matriisi* on olio, joka sisältää m riviä ja n saraketta, ja se voidaan esittää muodossa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

missä termit a_{ij} ovat matriisin A alkioita. Matriisin sarakkeiden ja rivien lukumäärä voidaan kuvata lyhyesti merkitsemällä matriisin A olevan $m \times n$-matriisi. *Neliömatriisissa* on sama määrä rivejä ja sarakkeita, eli $m = n$. Toisin sanoen neliömatriisi on $n \times n$-matriisi. Vektoreilla ja matriiseilla on olemassa hyödyllinen yhteys, sillä vektorit voidaan merkitä matriisimuodossa. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $\mathbf{b}$ voidaan ilmoittaa muodossa

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix},$$

mistä huomataan vektorien olevan yhden rivin sisältäviä matriiseja. *Vektori* on siis $1 \times n$-matriisi [22, s. 98–99.]

4.2 Vektorien ominaisuuksia

Määritellään seuraavaksi, kuinka vektoreita voidaan luokitella lineaarisesti riippumattomiksi tai selvittää vektoreiden suhde vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$. Vektorit voivat esimerkiksi virittää kyseisen avaruuden tai muodostaa sen kannan. Jotkin vektorit voidaan myös ilmoittaa toistensa lineaarikombinaationa.

Määritelmä 4.1. Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ vektoreita, joiden pituus on n. Vektoria $\mathbf{x}$ kutsutaan vektoreiden $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ **lineaarikombinaatioksi**, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $c_1, c_2, \ldots, c_k$, että

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_k\mathbf{v_k}.$$

[5, s. 242.]

Määritelmä 4.2. Olkoon $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ vektoriavaruuden V osajoukko. Joukko S **virittää** avaruuden V, jos sen jokainen vektori voidaan ilmoittaa joukon S vektoreiden lineaarikombinaationa. [21, s. 209.]

Määritelmä 4.3. Olkoon $c_1, c_2, \ldots c_k$ reaalilukuja. Vektorit $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ ovat **lineaarisesti riippumattomia**, jos yhtälöllä

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$$

on vain triviaali ratkaisu $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. [5, s. 244.]

Lineaarisen riippumattomuuden määritelmässä nollavektorin ollessa vektoreiden $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ lineaarikombinaatio kertoimet $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ovat nollia. Kun vektorit virittävät avaruuden ja ovat myös lineaarisesti riippumattomia, muodostavat ne tämän vektoriavaruuden kannan.

Määritelmä 4.4. Äärellinen joukko $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_k}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ **kannan**, jos

1. vektorit $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja

2. vektorit $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_k}$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$.

[5, s. 249.]

4.3 Matriisien ominaisuuksia

Määritellään aluksi matriisien yhteenlasku sekä kertolasku. Määritellään sitten matriisin kääntyvyys ja joitakin matriisin kääntyvyyteen liittyviä käsitteitä. Tarkastellaan myös matriisiyhtälöitä ja niiden ratkaisemista sekä matriisiyhtälön tulkintaa esimerkkien avulla.

Kahden $m \times n$-matriisin A ja B *summa* $A+B$ on $m \times n$-matriisi, jonka alkiot saadaan summaamalla toisiaan vastaavat alkiot a_{ij} ja b_{ij} keskenään. Matriisin A tulo reaaliluvun kanssa saadaan kertomalla jokainen matriisin A alkio kyseisellä reaaliluvulla. Matriisin tulo reaaliluvun kanssa skaalaa matriisia, mistä tuleekin nimitys skalaarilla kertominen. Matriisien A ja B erotuksessa $A - B$ tarvitaan sekä matriisien yhteenlaskua että kertomista skalaarilla, sillä erotus voidaan esittää muodossa $A + (-1)B$. Tästä muodosta matriisien erotus osataan laskea yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen avulla. [22, s. 99.]

Määritelmä 4.5. Olkoot A $m \times n$-matriisi ja B $n \times p$-matriisi sekä vektorit $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_p} \in \mathbb{R}^p$ matriisin B sarakevektorit. Tällöin matriisien A ja B **tulo** on $m \times p$-matriisi

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{b_p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b_1} & A\mathbf{b_2} & \cdots & A\mathbf{b_p}\end{bmatrix}.$$

[22, s. 101.] [5, s. 179.]

Määritelmässä 4.5 esiintyvä *matriisin ja vektorin välinen tulo* $A\mathbf{b_1}$ tarkoittaa

$$A\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}.$$

Näin saadaan siis laskettua tulomatriisin AB ensimmäinen sarakevektori $A\mathbf{b_1}$. Vastaavasti voidaan laskea loput sarakevektorit $A\mathbf{b_2}, \ldots, A\mathbf{b_p}$. [5, s. 179.]

Huomion arvoista matriisien tulon määritelmässä on, että kertojan sarakkeiden lukumäärän tulee vastata kerrottavan rivien lukumäärää, jotta tulo on ylipäätään määritelty. Tästä voidaan päätellä, että yleensä $AB \neq BA$. Matriisien tulo ei siis ole yleisesti vaihdannainen. Poikkeuksen matriisien tulon vaihdannaisuuteen tuo matriisin tulo oman käänteismatriisinsa kanssa.

Määritelmä 4.6. Olkoon matriisi A neliömatriisi. Matriisia A kutsutaan **kääntyväksi**, jos on olemassa sellainen neliömatriisi B, jolle

$$AB = BA = I,$$

missä I on $n \times n$-identiteettimatriisi. Matriisia B kutsutaan tällöin matriisin A **käänteismatriisiksi**, ja sitä merkitään $B = A^{-1}$. [5, s. 186.]

Neliömatriisista saadaan tietoa myös matriisin determinantin avulla.

Määritelmä 4.7. Olkoon A neliömatriisi, missä on vähintään kaksi saraketta ja riviä. Matriisin A **determinantti** on

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}), \end{aligned}$$

missä $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$ ovat matriisin A ensimmäisen rivin alkiot ja $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1n}$ matriisin A **alimatriiseja** A_{1j}, jotka saadaan poistamalla matriisista A ensimmäinen rivi ja sarake j. [22, s. 181.]

Lause 4.8. *Jos A ja B ovat neliömatriiseja, niin*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Todistus. Ks. [21, s. 143]. □

Matriisien hyöty konkretisoituu matriisiyhtälöissä. Matriisilaskenta tarjoaa uudenlaisia keinoja suurempien yhtälöryhmien ratkaisuun ja ratkaisujen arviointiin. Matriisilaskennan tarjoamat keinot lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun ovat hyödyllisiä erityisesti useamman yhtälön tapauksessa, ja voivat mahdollistaa yksinkertaisemman ratkaisukeinon tai keinoja matriisin ominaisuuksien selvittämiseen.

Määritelmä 4.9. Olkoot vektorit $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja A $m \times n$-matriisi. Yhtälöä

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

kutsutaan **matriisiyhtälöksi**. [22, s. 39.]

Oletetaan, että vektorit $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ ovat matriisin A sarakevektorit. Matriisiyhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voidaan kirjoittaa eri muodoissa, jotka johtavat samaan ratkaisuun alkuperäisen yhtälön kanssa. Saman ratkaisun tuottavat myös *vektoriyhtälö*

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b},$$

kokonaismatriisi

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{a_n} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

ja *lineaarinen yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Lineaarista yhtälöryhmää kutsutaan homogeeniseksi, jos $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$ ja muulloin epähomogeeniseksi. [30, s. 59–62, 80.] Matriisiyhtälö on tarpeellinen myös matriisin ominaisarvojen ja -vektoreiden määrittelyssä ja toisaalta niiden ratkaisemisessa.

Määritelmä 4.10. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ neliömatriisi. Luku λ on matriisin A **ominaisarvo**, jos on olemassa sellainen vektori $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, jolle

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vektoria $\mathbf{x}$ kutsutaan ominaisarvoa λ vastaavaksi **ominaisvektoriksi**. [21, s. 422.]

Lineaarisesta yhtälöryhmästä muodostettu kokonaismatriisi voidaan muokata *rivioperaatioilla* muotoon, joka säilyttää yhtälöryhmän ratkaisut samana. Rivioperaatioita ovat:

1. Riviin lisätään toinen rivi vakiolla kerrottuna.
2. Rivin alkiot kerrotaan nollasta poikkeavalla vakiolla.
3. Kahden rivin paikat vaihdetaan.

Rivioperaatioiden avulla voidaan esimerkiksi selvittää, ovatko kaksi matriisia riviekvivalentteja keskenään.

Määritelmä 4.11. Olkoot matriisit A ja B $m \times n$-matriiseja. Matriisit A ja B ovat keskenään **riviekvivalentteja**, jos toinen voidaan muokata samaksi kuin toinen matriisi käyttäen rivioperaatioita. [5, s. 157.]

Rivioperaatioilla voidaan operoida myös identiteettimatriisia. Tällöin jokaista yksittäistä rivioperaatiota vastaa oma alkuperäisen matriisin kanssa riviekvivalentti matriisinsa.

Määritelmä 4.12. Olkoon I identiteettimatriisi. Suorittamalla jokin yksittäinen rivioperaatio matriisille I, saadaan tätä kyseistä rivioperaatiota vastaava **alkeismatriisi** E. [30, s. 168.]

Lause 4.13. *Kaikki alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi. [30, s. 170.]*

Todistus. ks. [30, s. 170]. □

Kutsutaan lukusuunnassa matriisin rivin ensimmäistä nollasta poikkeavaa alkiota *johtavaksi alkioksi*. Rivioperaatioilla voidaan muokata matriisi redusoituun porrasmuotoon, minkä avulla voidaan ratkaista matriisiyhtälö helposti. Redusoitu porrasmuoto antaa saman ratkaisun kuin alkuperäinen yhtälö, sillä alkuperäiselle matriisille on suoritettu ainoastaan rivioperaatioita redusoituun muotoon pääsemiseksi.

Määritelmä 4.14. Matriisi on **redusoidussa porrasmuodossa** (rref-muodossa), jos

1. ainoastaan nollia sisältävät rivit ovat alimmaisia rivejä,
2. rivin johtava alkio on aina edeltävän rivin johtavan alkion oikealla puolella,
3. jokainen johtava alkio on 1, eli *johtava ykkönen*,
4. johtavan ykkösen sarakkeessa on sen lisäksi ainoastaan nollia.

[5, s. 164.]

Redusoidussa porrasmuodossa olevasta matriisista voidaan lukea yhtälöryhmän ratkaisu, ja muoto on yksikäsitteinen. Jokaista saraketta vastaa muuttuja, jonka arvo luetaan kokonaismatriisin sarakkeesta **b** johtavan ykkösen riviltä. Yhtälöryhmän muuttuja on *vapaa muuttuja*, jos kyseisessä sarakkeessa ei ole johtavaa ykköstä. Havainnollistetaan esimerkillä yhtälöryhmän ratkaisua redusoidun riviporrasmuodon avulla.

Esimerkki 4.15. Ratkaise yhtälöryhmät

$$1.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 20 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 23 \end{cases}, \quad 2.\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 10x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad 3.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 31 \end{cases}.$$

Muodostetaan aluksi yhtälöryhmistä kokonaismatriisit. Käytännössä ei ole järkevää muuntaa kokonaismatriisia käsin vaihe vaiheelta rivioperaatioilla rref-muotoon, vaan ratkaisu voidaan kätevästi tehdä hyödyntäen jotakin matemaattista ohjelmistoa. Harjoitellaan nyt siis ainoastaan ratkaisun tulkintaa rref-muodosta.

1. Yhtälöryhmästä muodostettu kokonaismatriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}$, jonka rref-muoto on $\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Nyt rref-muodosta voidaan lukea yhtälöryhmän ratkaisu eli muuttujien x_1, x_2 ja x_3 arvot viimeisestä sarakkeesta. Muuttujan x_1 arvo luetaan ensimmäiseltä riviltä, muuttujan x_2 toiselta riviltä ja viimeisen muuttujan arvo vastaavasti kolmannelta riviltä. Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$, joka on yksikäsitteinen.

2. Yhtälöryhmästä muodostettu kokonaismatriisi $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 10 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, jonka rref-muoto on $\text{rref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Matriisin alin rivi rref-muodossa vastaa yhtälöä $0 = 1$, joka on ristiriitainen eikä pidä paikkaansa. Epätoden yhtälön vuoksi yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

3. Yhtälöryhmästä muodostettu kokonaismatriisi $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$, jonka rref-muoto on $\operatorname{rref}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Rref-muodon kolmannessa ja neljännessä sarakkeessa vasemmalta luettuna ei ole johtavia ykkösiä. Muuttujat x_3 ja x_4 ovat siis vapaita muuttujia. Merkitään niitä reaalisilla parametreilla $x_3 = s$ ja $x_4 = t$. Nyt yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2s + 3t \\ x_2 = 5 + s - 4t \\ x_3 = s \\ x_4 = t. \end{cases}$$

Muuttujan x_1 arvo on saatu ratkaisemalla kokonaismatriisin $\operatorname{rref}(C)$-muodon ensimmäisen rivin yhtälö

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 + 2s - 3t = 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = 7 - 2s + 3t. \end{aligned}$$

Vastaavasti on ratkaistu muuttuja x_2. Yhtälöryhmän ratkaisuja on äärettömän monta, koska parametreiksi s ja t voidaan valita mitkä tahansa reaaliluvut.

Seuraavat määritelmät kertovat matriisiyhtälön ratkaisuiden lukumäärästä ja avaruuden kannassa olevien vektoreiden lukumääristä. Nämä ominaisuudet ovat nekin yhteydessä matriisin kääntyvyyteen.

Määritelmä 4.16. Avaruuden H **dimensio** $\dim(H)$ on sen kannassa olevien vektorien lukumäärä. Lisäksi on määritelty, että $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$. [22, s. 172.]

Määritelmä 4.17. Olkoon A $m \times n$-matriisi. Matriisin A **nolla-avaruus** $\mathcal{N}(A)$ on yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ joukko. Matriisin A **sarakeavaruus** $\mathcal{R}(A)$ on kaikkien niiden vektorien $\mathbf{b}$ joukko, joilla yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisuja. Sarakeavaruuden dimensiota kutsutaan matriisin A **asteeksi** $\operatorname{rank}(A)$. [22, s. 172, 220, 223.]

Redusoidun porrasmuodon avulla voidaan selvittää matriisiyhtälön ratkaisujen lisäksi esimerkiksi matriisin aste, kun tiedetään rref-muodossa esiintyvien johtavien ykkösten lukumäärä, koska matriisin aste on sen rref-muodossa esiintyvien johtavien ykkösten lukumäärä [30, s. 75].

4.4 Kääntyvien matriisien lause ja dimensiolause

Edellä esiteltyjen käsitteiden ja ominaisuuksien avulla voidaan nyt ymmärtää dimensiolause ja kääntyvien matriisien lauseen väittämät todistuksineen. Lauseiden todistusten jälkeen tarkastellaan lauseita soveltavia esimerkkejä niiden käyttötarkoituksen ja hyödyn havainnollistamiseksi.

Lause 4.18 (Dimensiolause)**.** *Olkoon A $m \times n$-matriisi. Tällöin*

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n.$$

[22, s. 259.]

Todistus. Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi ja että $\operatorname{rank}(A) = r$. Matriisin aste on redusoidun porrasmatriisin johtavien ykkösten lukumäärä. Tällöin $\operatorname{rref}(A)$-muodossa on $n - r$ saraketta, joissa ei ole johtavaa ykköstä. Siis yhtälössä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on sama lukumäärä vapaita muuttujia. Näin ollen homogeenisen yhtälön ratkaisu muodostuu $n - r$ vektorin lineaarikombinaationa. Nämä sarakevektorit ovat lisäksi lineaarisesti riippumattomia, ja ne soveltuvat matriisin nolla-avaruuden kannaksi, jolloin nolla-avaruuden dimensio on $n - r$. Tällöin

$$\dim \mathcal{N}(A) + \operatorname{rank}(A) = (n - r) + r = n.$$

□

Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan, kuinka matriisin redusoidusta porrasmuodosta voidaan selvittää sen sarakeavaruuden dimensio eli aste sekä sen nolla-avaruuden dimensio dimensiolauseen avulla.

Esimerkki 4.19. Olkoon D $m \times n$-matriisi, jonka rref-muoto on

$$\operatorname{rref}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritä matriisin D aste ja nolla-avaruuden dimensio.

Matriisin aste saadaan suoraan matriisin rref-muodon johtavien ykkösten lukumäärästä. Johtava ykkönen on rref-muodon rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio vasemmalta katsottuna. Johtavan ykkösen kanssa samassa sarakkeessa on rref-muodossa ainoastaan nollia. Koska esimerkin rref-muodossa johtavia ykkösiä on kolme kappaletta, on matriisin D aste tällöin myös kolme. Siis $\operatorname{rank}(D) = 3$.

Dimensiolause (Lause 4.18) luo yhteyden matriisin sarake- ja nolla-avaruuden välille, sillä niiden summa on lauseen mukaan yhtä suuri kuin matriisin sarakkeiden lukumäärä. Yhtälöstä

$$\operatorname{rank}(D) + \dim\left(\mathcal{N}(D)\right) = n$$

voidaan siis ratkaista matriisin D nolla-avaruuden dimensio

$$\dim\left(\mathcal{N}(D)\right) = n - \operatorname{rank}(D).$$

Koska matriisilla D on 6 saraketta, on $n = 6$. Tällöin nolla-avaruuden dimensioksi saadaan $\dim\left(\mathcal{N}(D)\right) = 6 - 3 = 3$. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että matriisin rref-muodosta voidaan suoraan selvittää myös sen nolla-avaruuden dimensio. Nolla-avaruuden dimensio on rref-muotoisen matriisin sellaisten sarakkeiden lukumäärä, joissa ei ole johtavaa ykköstä.

Lause 4.20 (Kääntyvien matriisien lause)**.** *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neliömatriisi. Tällöin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:*

1. *A on kääntyvä,*
2. *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,*
3. *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu,*
4. *A on riviekvivalentti identiteettimatriisin $I_{n\times n}$ kanssa,*

5. Matriisi A saadaan alkeismatriisien tulona,

6. $\text{rank}(A) = n$*,*

7. Matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia,

8. Matriisin A sarakkeet virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$*,*

9. Matriisin A sarakkeet muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ *kannan,*

10. $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0$*,*

11. Luku nolla ei ole matriisin A ominaisarvo,

12. $\det(A) \neq 0$.

[22, s. 120, 262, 301.][30, s. 204.]

Todistus. Todistuksessa osoitetaan seuraavat implikaatioketjut

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 5. \Rightarrow 1.$$

ja

$$6. \Rightarrow 4. \quad \text{ja} \quad 2. \Rightarrow 8. \Rightarrow 9. \Rightarrow 6.$$

sekä ekvivalenssit

$$1. \Leftrightarrow 12., \quad 3. \Leftrightarrow 7., \quad 3. \Leftrightarrow 11. \quad \text{ja} \quad 6. \Leftrightarrow 10.$$

todeksi.

1. $\Rightarrow$ 2. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin tiedetään, että käänteismatriisi A^{-1} on olemassa. Vektori $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ on tarkasteltavan matriisiyhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisu, sillä

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_{n\times n}\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Nyt on osoitettu, että yhtälöllä on olemassa jokin ratkaisu, mutta ratkaisu on tämän lisäksi yksikäsitteinen. Jos $\mathbf{x_1}$ on jokin ratkaisu, niin tällöin kertomalla yhtälö $A\mathbf{x_1} = \mathbf{b}$ puolittain vasemmalta käänteismatriisilla A^{-1} saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & & A^{-1}A\mathbf{x_1} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow & & I_{n\times n}\mathbf{x_1} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow & & \mathbf{x_1} &= A^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Koska vektorit $\mathbf{x_1} = A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}$ ovat samat, ratkaisu on yksikäsitteinen.

2. $\Rightarrow$ 3. Oletetaan, että matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreilla $\mathbf{b}$. Koska $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, niin myös yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu. Yksikäsitteisen ratkaisun on tässä tapauksessa oltava triviaali ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sillä $\mathbf{0}$ on jokaisen lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu.

3. $\Rightarrow$ 4. Oletetaan, että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ainoastaan triviaali ratkaisu. Yksikäsitteinen ratkaisu on mahdollinen vain, jos matriisin redusoidussa porrasmuodossa ei ole vapaita muuttujia, vaan jokaisessa sarakkeessa on johtava ykkönen eli

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neliömatriisin tapauksessa redusoitu porrasmuoto on $I_{n\times n}$. [5, s. 169.]

4. $\Rightarrow$ 5. Oletetaan, että matriisi A on riviekvivalentti identiteettimatriisin $I_{n\times n}$ kanssa. Siis $\mathrm{rref}(A) = I_{n\times n}$. Tällöin matriisi A saadaan redusoituun porrasmuotoon kertomalla se tiettyjä rivioperaatioita vastaavilla alkeismatriiseilla $E_1, E_2, \ldots, E_k$, eli

$$E_1 E_2 \cdots E_k A = \mathrm{rref}(A) = I_{n\times n}.$$

Koska alkeismatriisit ovat kääntyviä, yhtälö voidaan kertoa puolittain vasemmalta alkeismatriisien tulon käänteismatriisilla, eli lausekkeella $(E_1E_2\cdots E_k)^{-1}$. Yhtälö on siis muotoa

$$\begin{aligned} & (E_1E_2\cdots E_k)^{-1} \cdot E_1E_2\cdots E_k A = (E_1E_2\cdots E_k)^{-1} \cdot I_{n\times n} \\ \Leftrightarrow \quad & A = (E_1E_2\cdots E_k)^{-1} \cdot I_{n\times n} \\ \Leftrightarrow \quad & A = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}. \end{aligned}$$

Koska matriisit $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ ovat Lauseen 4.13 nojalla myös alkeismatriiseja, voidaan matriisi A esittää alkeismatriisien tulona.

5. $\Rightarrow$ 1. Oletetaan, että matriisi A saadaan alkeismatriisien $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tulona. Koska alkeismatriisit ovat kääntyviä, on matriisi A niiden tulona myös kääntyvä.

   Nyt on osoitettu, että väitteet 1. − 5. ovat keskenään yhtäpitäviä.

6. $\Rightarrow$ 4. Oletetaan, että $\mathrm{rank}(A) = n$. Tällöin matriisin A redusoidussa porrasmuodossa on yhteensä n kappaletta johtavia ykkösiä, eli nollasta poikkeavia rivejä. Ainoa matriisi, jonka rref-muoto on tällainen, on $n \times n$-identiteettimatriisi. Siis matriisi A on riviekvivalentti identiteettimatriisin $I_{n\times n}$ kanssa.

2. $\Rightarrow$ 8. Oletetaan, että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Tällöin jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $\mathbf{b}$ voidaan kirjoittaa matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaationa. Siis matriisin A sarakevektorit virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$.

8. $\Rightarrow$ 9. Oletetaan, että matriisin A sarakevektorit virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$. Tällöin matriisin A sarakeavaruus on koko avaruus $\mathbb{R}^n$ määritelmän perusteella. Näin ollen sarakeavaruuden dimensio, eli matriisin A aste, on n. Matriisin A rref-muoto sisältää siis n kappaletta johtavia ykkösiä. Edellä osoitettiin, kuinka matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, jolloin ne määritelmän perusteella myös muodostavat kannan avaruudelle $\mathbb{R}^n$.

9. $\Rightarrow$ 6. Oletetaan, että matriisin A sarakevektorit muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannan. Koska sarakkeet muodostavat avaruudelle kannan, ne myös virittävät sen. Koska sarakevektorit virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$, se on matriisin A sarakeavaruus, jonka dimensio on n. Matriisin A asteeksi saadaan siis n.

   Näin on osoitettu, että väitteet 1. – 9. ovat yhtäpitäviä.

1. $\Leftrightarrow$ 12. Olkoon $R = \text{rref}(A)$. Siis matriisi R saadaan alkeismatriisien $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ja matriisin A tulona. Nyt matriisin R determinantti on

$$\det(R) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k A),$$

   johon soveltamalla Lausetta 4.8 huomataan, että

$$\det(R) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(A),$$

   Koska yhdenkään alkeismatriisin determinantti ei voi olla nolla, on $\det(R) = 0$ täsmälleen silloin, kun $\det(A) = 0$.

   (a) Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin $\text{rref}(A) = R = I_{n\times n}$. Koska identiteettimatriisin determinantti on aina 1, niin $\det(R) = \det(I_{n\times n}) = 1 \neq 0$. Siis $\det(A) \neq 0$.

   (b) Oletetaan, että $\det(A) \neq 0$. Siis matriisin A rref-muodossa ei voi olla ainuttakaan nollariviä. Koska matriisi A on neliömatriisi, on jokaisella rivillä oltava johtava ykkönen. Näin ollen matriisi R on identiteettimatriisi $I_{n\times n}$, ja aiemmin osoitetun perusteella matriisi A on kääntyvä.

3. $\Leftrightarrow$ 7.

   (a) Oletetaan ensin, että yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) ja että matriisin A sarakevektorit ovat $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$. Tällöin yhtälöllä

$$\begin{aligned} & & A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{a_k} \end{bmatrix} \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow & \mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \cdots + \mathbf{a_k}x_k &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

   on ainoastaan ratkaisu $x_1, x_2, \ldots, x_k = 0$. Siis matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia.

   (b) Oletetaan seuraavaksi, että matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin sarakevektoreiden muodostamalla lineaarisella homogeenisella vektoriyhtälöllä on ainoastaan triviaali ratkaisu. Siis yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ainoastaan ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. $\Leftrightarrow$ 11. Matriisin ominaisarvon tulee toteuttaa yhtälö $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ määritelmän perusteella. Jos luku nolla olisi matriisin A ominaisarvo, tulisi yhtälöllä

$$\begin{aligned} & & A\mathbf{x} &= 0\mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow & A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

   olla ei-triviaali ratkaisu. Jotta neliömatriisi voisi olla kääntyvä, aiemman perusteella yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on ainoastaan triviaali ratkaisu. Siis matriisi A on kääntyvä tismalleen silloin, kun nolla ei ole sen ominaisarvo.

6. $\Leftrightarrow$ 10. Dimensiolauseen (Lause 4.18) nojalla matriisin asteen ja nolla-avaruuden dimension summa on matriisin sarakkeiden lukumäärä. Siis

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n,$$

jolloin $\operatorname{rank}(A) = n$ jos ja vain jos $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0$.

Näin ollen kaikki väitteet 1. – 12. ovat yhtäpitäviä ja lause on todistettu.

□

Seuraavissa esimerkeissä perehdytään dimensiolauseen ja kääntyvien matriisien lauseen sovelluksiin. Lauseiden avulla saadaan hyvin paljon tietoa matriisista ja matriisiyhtälöistä.

Esimerkki 4.21. Tarkastellaan joitakin $4{\times}4$-matriisin A ja kääntyvän matriisin B ominaisuuksia, kun $\operatorname{rank}(A) = 3$.

Kääntyvien matriisien lauseen (Lause 4.20) nojalla matriisi A ei ole kääntyvä, koska $\operatorname{rank}(A) = 3 \neq 4 = n$. Matriisin aste eli sarakeavaruuden dimensio eli $\operatorname{rank}(A)$ on 3 matriisin asteen määritelmän (Määritelmä 4.17) mukaan. Homogeenisella yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on neliömatriisin tapauksessa joko vain triviaali ratkaisu tai ääretön määrä ratkaisuja. Kääntyvän neliömatriisin muodostamalla matriisiyhtälöllä, jota vastaa homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä, on vain triviaali ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Koska matriisi A ei ole kääntyvä, on yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oltava äärettömästi ratkaisuja. Matriisin A determinantin on kääntyvien matriisien lauseen nojalla oltava nolla, sillä kääntyvien matriisien determinantit ovat aina nollasta poikkeavia. Matriisin A rref-muoto ei ole identiteettimatriisi $I_{4\times4}$. Tämä voidaan päätellä myös esimerkiksi siitä, että matriisin aste on sen rref-muodossa olevien johtavien ykkösten määrä. Tässä tapauksessa $\operatorname{rank}(A) = 3$ eli $\operatorname{rref}(A)$ sisältää vain kolme johtavaa ykköstä. Identiteettimatriisissa $I_{4\times4}$ johtavia ykkösiä tulisi olla neljä kappaletta.

Koska matriisi B on kääntyvä, ovat sen sarakkeet Lauseen 4.20 perusteella lineaarisesti riippumattomia ja ne viritttävät avaruuden $\mathbb{R}^n$ sekä muodostavat sen kannan. Näiden ominaisuuksien lisäksi matriisilla B on kaikki loput Kääntyvien matriisien lauseen ominaisuudet.

Esimerkki 4.22. Olkoon A 3×3 matriisi, jolle $\det(A) = 2$. Tarkastellaan matriisin A ominaisuuksia kääntyvien matriisien lauseen avulla.

Koska matriisin A deteminantti on nollasta poikkeava, on matriisi kääntyvien matriisien lauseen (Lause 4.20) nojalla kääntyvä. Kääntyvän matriisin omainaisarvoihin ei kuulu luku nolla, ja samalla tiedetään, että matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain yksi ratkaisu (triviaali ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) ja matriisin A nolla-avaruuden dimensio $\dim(\mathcal{N}(A))$ on nolla. Tiedetään myös, että jokaisen $\mathbb{R}^3$ vektorin voi lausua matriisin A sarakkaieden lineaarikombinaationa, sillä matriisin A sarakkeet virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

5 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa eritellään käänteisen oppimisen menetelmällä opiskelleen testiryhmän ja toisaalta hybridimallia hyödyntäneen verrokkiryhmän opintojaksojen käytännön järjestelyitä, eli niiden rakennetta, opiskelijoiden viikkoaikataulua sekä opintojaksojen arviointia peilaten järjestelyitä luvussa 3 esitettyyn teoriaan. Lisäksi tässä luvussa perehdytään tarkemmin tutkimuksessa aineistona käytettyihin mittauksiin, joita ovat matematiikan perustaitojen testi, lopputesti sekä opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2 tentit. Lopuksi esitellään tutkimuksessa käytetyt tutkimusmenetelmät.

5.1 Käytännön järjestelyt testiryhmällä ja verrokkiryhmällä

Lukuvuonna 2019–2020 käänteinen oppiminen opintojaksoilla Insinöörimatematiikka C1 ja C2 eli testiryhmillä oli strukturoitua, millä tarkoitetaan sekoitusta FC- ja FL-malleja. Opiskelijoilla oli paljon vapautta oman oppimisprosessinsa suunnittelussa. He pystyivät kunkin viikon sisällä valitsemaan suurimman osan omista työskentelytavoistaan ja -ajoistaan. Oman opiskelun aikatauluttaminen vapaasti kuuluu FL-malliin. Toisaalta opiskelijan oppiminen ei ollut täysin omatahtista, vaan sitä säätelivät muun muassa materiaalin julkaisemisen ja tehtävien palautusten tarkat ajankohdat. Oppimateriaali kursseilla oli sähköistä ja melko monipuolista ja sisälsi muun muassa videoita, opintomonisteen ja esimerkkejä. FC-mallissa tukeudutaan pääosin opetusvideoihin, joissa oppimisen tahtia ja järjestystä edelleen säätelee opettaja. Videoissa on kuitenkin mahdollisuus pysäyttää, kelata tai jättää osa katsomatta, mikä puolestaan tukee omatahtisuutta. Opintojaksojen opiskelijoita kannustettiin tukeutumaan toisiinsa ja muodostamaan ryhmiä, joissa opiskella yhdessä. Käänteiselle oppimiselle keskeinen opiskelun yhteisöllinen luonne otettiin siis huomioon. Heille tarjottiin vapaaehtoista tukea eri tasoilla ja tavoitteiden saavuttamista pyrittiin seuraamaan opettajien ja opiskelijoiden viikoittaisilla tapaamisilla. Vaikka vastuuta oppimisesta siirrettiin opiskelijoille, ei tarkoituksena ollut jättää heitä yksin vaan tarjota monipuolista tukea ja nimenomaan oikea-aikaista ohjausta.

Opintojaksot koostuivat kolmesta neljään päivään kestäneestä aloitusviikosta, kuudesta aiheviikosta ja tenttiviikosta. Opintojaksot pohjautuivat niiden yleisiin osaamistavoitteisiin ja matemaattisiin osaamistavoitteisiin, joita oli asetettu viikoittain eri tasoisille opiskelijoille. Opiskelu alkoi aloitusviikoilla aina ajankäyttösuunnitelman laatimisella, jossa opiskelija aikataulutti tulevaa työskentelyään ja pohti tekijöitä, jotka voivat edistää opiskelua tai toisaalta toimia sitä hidastavana tai estävänä voimana. Näin tuettiin opiskelijan kuvaa itsestään oppijana, vahvistettiin autonomian, itseohjautuvuuden ja omatahtisen oppimisen taitoja. Opintojaksolla Insinöörimatematiikka C1 opiskelijat tekivät aloitusviikolla matematiikan perustaitojen testin, ja opintojakson Insinöörimatematiikka C3 aloitusviikolla tehtiin lopputesti matematiikan perustaidoista ja opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja 2 sisällöistä.

Opintojaksojen Moodle-oppimisalustat oli rakennettu aiheviikoittain, mistä opiskelija löysi viikkokohtaiset osaamistavoitteet, opetusvideot, viittaukset kirjallisuuteen ja linkit kyseistä aihetta käsittelevään opintomonisteen kappaleeseen. Oppimateriaalina toimivat opintojakson luentomoniste, kirja ja opetusvideot esimerkkeineen. Opiskelun tukena olivat viikkokohtaiset verkkotehtävät ja laskuharjoitustehtävät. Moodle-alustalla olleet STACK-verkkotehtävät testasivat matemaattisen osaamisen ulottuvuuksista opiskelijan käsitteellistä ymmärtämistä sekä hänen proseduuriensa sujuvuuttaan. Verkkotehtävät olivat satunnaistettuja, jotta vastauksen kopioinnin houkutus minimoituisi. Verkkotehtävien määrä ei ollut sama kaikilla aiheviikoilla, vaan vaihteli 10–30 tehtävän välillä. Tehtävien laajuus oli myös vaihteleva. Kullakin aiheviikolla oli aina kuusi laskuharjoitustehtävää, joista kolme ensimmäistä tehtävää tuli olla tehtynä ennen viikoittaista laskuharjoitustilaisuutta, jossa opiskelijoiden tehtäviä käytiin yhdessä taululla läpi. Kolme viimeistä tehtävää laskettiin laskuharjoitustilaisuudessa, jossa he saattoivat tehtäviin apua. Viimeiset tehtävät palautettiin Moodleen ja niille tehtiin itse- ja vertaisarviointi malliratkaisuiden ja pisteytysohjeiden avulla.

Opintojaksoilla oli mahdollisuus tukitilaisuuteen, jossa harjoiteltiin lukion ja aiempien aihepiirien kertaavia tehtäviä ohjattuna. Ohjausta oli saatavilla viikoittain useampaan kertaan myös vapaaehtoisessa tilaisuudessa Reenaamossa, jossa opiskelijat saivat pyytää apua opintojakson tehtäviin, opiskella teoriaa tai kysyä selvennystä epäselviksi jääneisiin aiheisiin. Opiskelijan oli suositeltavaa osallistua opintojakson viikoittaisiin prime time -tilaisuuksiin. Siellä opiskelijat työskentelivät omissa pienryhmissään ryhmätehtävän parissa, minkä tarkoituksena oli toimia viikon aiheen kertaavana, kokoavana tai laajentavana kokonaisuutena. Prime time -tilaisuuksissa oli kerrallaan useampi ryhmä läsnä kahden opintojakson opettajan kanssa. Ryhmät kävivät tilaisuuden aikana myös opettajan kanssa keskustelun, jossa tuotiin esiin epäselväksi jääneet kohdat ja varmistettiin viikoittaisten osaamistavoitteiden saavuttaminen. Keskustelussa hyödynnettiin opiskelijan etukäteen täyttämää itsearviointia viikon osaamistavoitteiden saavuttamisesta.

Arviointi opintojaksoilla rakentui aloitusviikosta ja aiheviikoista koostuneista pisteistä (70 %) ja lopputentistä (30 %). Maksimipistemäärä yksittäiseltä opintojaksolta oli 1000 pistettä, joka jakaantui viikkokohtaiseen 100 pisteeseen ja tentin 300 pisteeseen. Viikoittaiset pisteet koostuivat verkkotehtävistä saaduista pisteistä, laskuharjoituksessa merkityistä tehtävistä, palautetuista itse- ja vertaisarvioiduista laskuharjoitustehtävistä, prime time -tilaisuuden ryhmätehtävästä sekä osaamisen arvioinnista ja oman osaamistavoitteiden sekä osallistumisen itsearvioinnista. Opintojakson hyväksytty suorittaminen ei vaatinut osallistumista lopputenttiin, vaan sen aikana kerätyillä pisteillä oli mahdollisuus teoreettisesti jopa loppuarvosanaan 3.

Verrokkiryhmän opintojaksot Insinöörimatematiikka B1 ja B2 järjestettiin hieman perinteisemmällä luento-opetus, laskuharjoitukset ja tentti -periaatteella. Toteutus ei ollut kuitenkaan aivan perinteinen: kuusi tuntia luentoja ja kaksi tuntia harjoituksia viikossa, minkä jälkeen lopputentti määrittäisi arvosanan. Verrokkiryhmän hybridimallin toteutuksessa opiskelijoilla oli neljä tuntia luentoja viikossa, minkä lisäksi heillä oli laskuharjoitustilaisuus kahdesti viikossa testiryhmästä poiketen. Heidän viikkoaikataulunsa jakaantui siis tasan luentojen ja harjoitusten välille. Toteutuksella pyrittiin tuomaan opiskelijan omaa aktiivisuutta esiin. Lisäksi heillä oli myös tarjolla sähköistä oppimateriaalia, kuten opetusvideoita ja verkkotehtäviä, minkä vuoksi on perusteltua puhua sulautetun oppimisen käyttämisestä. Verrokkiryhmän opiskelijat osallistuivat myös opintojakson Insinöörimatematiikka B1 alussa eli lukuvuoden alussa samaan matematiikan perustaitotestiin kuin testiryhmä, ja tämän lisäksi samaan lopputestiin.

Laskuharjoitustehtäviä opintojaksoilla tehtiin viikon ensimmäisessä laskuharjoitustilaisuudessa kaksi kappaletta ja kotitehtävänä oli tehdä neljä tehtävää. Viikon toisessa harjoitustilaisuudessa laskettiin paikan päällä neljä tehtävää. Kotitehtävät tarkastettiin aina seuraavan alkuviikon laskuharjoitustilaisuudessa. Lisäksi opintojaksolla oli kuusi verkkotehtävää Moodlesivulla aina kullakin viikolla. Verrokkiryhmän opintojaksojen Moodlesivut oli rakennettu opetusviikoiksi vastaavaan tyyliin kuin testiryhmän. Kunkin viikon kohdalle oli eritelty viikkokohtaiset aiheet, mutta osaamistavoitteita ei oltu eritelty kuten testiryhmän kohdalla oli. Opiskelijoille oli tarjolla testiryhmän tapaan videomateriaalia heidän Moodlesivuillaan, ja myös heille oli tarjolla vapaaehtoista tukea opiskeluun. Tukea tarjosivat vapaamuotoinen Reenaamoa vastaava Laskutupa sekä testiryhmän kanssa samankaltainen tukitilaisuus, jossa harjoiteltiin lukion kurssien ja aiempien aihepiirien kertaavia tehtäviä ohjattuna.

Opintojaksojen arviointi koostui puoliksi laskuharjoituspisteistä ja puoliksi lopputentistä. Summatiivisella lopputentillä oli testiryhmää suurempi vaikutus loppuarvosanaan. Lopputenttiin sai osallistua, jos opiskelija oli kerännyt vähintään puolet harjoituspisteistä. Lopputentti oli siis pakollinen osa kurssin suorittamista. Verrokkiryhmää arvioitiin formatiivisen arvioinnin variaatiolla, jossa arviointiin otettiin mukaan opintojakson aikana tehtyä työtä, mutta ei kuitenkaan yhtä paljon kuin testiryhmän arvioinneissa otettiin. Arviointi tehtiin toissijaisesti myös pelkän tentin avulla kaikille opiskelijoille ja jos opiskelijan arvosana pelkän tentin turvin oli parempi kuin tenttipisteiden ja laskuharjoituspisteiden yhdistelmän antama arvosana, loppuarvosanaksi opiskelijalle jäi aina parempi arvosana.

5.2 Tutkimusaineisto

Tutkimuksessa käytetty aineisto koostuu lukuvuoden 2019–2020 alussa tehdystä matematiikan perustaitotestin, opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja 2 tenttien sekä lopputestin pisteistä sekä näiden testien ja tenttien tehtävien tehtävänannoista. Tenteistä tarkastellaan vain ensimmäistä tenttikertaa eikä rästitenttejä ole otettu huomioon. Lopputesti on suoritettu opintojakson Insinöörimatematiikka 3 alussa, ja sillä on testattu osin uudestaan perustaitotestin tehtäviä ja osin opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2 sisältöalueita. Tutkimuksessa on käsitelty ainoastaan tutkimusluvan antaneiden opiskelijoiden pistemääriä, ja tulosten käsittelyssä on säilytetty opiskelijan anonymiteetti.

Perustaitotesti ja lopputesti olivat sähköisiä testejä, joissa tehtävätyyppi ja vaikeustaso olivat kaikille opiskelijoille samat. Lukuarvot tehtävissä eivät kuitenkaan olleet samat jokaiselle, vaan ne oli satunnaistettu. Tämän vuoksi testin tulokset eivät ole täysin vertailukelpoisia, mutta testi on helposti käytettävissä uudelleen. Testeihin vastattiin sähköisesti syöttämällä pelkkä tehtävän vastaus tai vastaukset, minkä vuoksi vastausta ei tarvinnut osata perustella. Lopullisen vastauksen ollessa väärin pisteitä ei saanut siis oikeista välivaiheista. Perustaitotestissä oli 16 lukiotasoista tehtävää ja lopputestissä 16 tehtävää, joista 8 tehtävää oli lähes samoja kuin perustaitotestissä ja loput 8 tehtävää mittasivat myös opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja 2 aihealueiden hallintaa.

Opintojakson Insinöörimatematiikka 1 tentti oli paperinen tentti, jossa testiryhmä teki kolme tehtävää ja verrokkiryhmä samat kolme tehtävää, minkä lisäksi he tekivät yhden tehtävän, jota testiryhmän osallistujat eivät laskeneet. Tentissä välivaiheilla ja perusteluilla oli oma merkityksensä arvostelussa eikä pelkällä oikealla vastauksella saanut täysiä pisteitä. Tehtävät olivat tämän opintojakson tentissä samat kolmen tehtävän osalta kaikille testi- ja verrokkiryhmän opiskelijoille. Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tentti oli sähköinen ja testiryhmä teki ensimmäisen opintojakson tapaan kolme tehtävää ja verrokkiryhmä neljä tehtävää tentissä. Tentin ensimmäinen tehtävä oli monivalintatehtävä, jossa annetuista vaihtoehdoista valittiin oikea vastaus. Toisessa tehtävässä opiskelijan tuli syöttää tehtävän vastaukset ilman perusteluja. Testiryhmä ei tehnyt tämän tentin tehtävää 3, joka kuului verrokkiryhmän tenttiin. Tentin tehtävä 4, jonka tekivät kummankin ryhmän osallistujat, vaati opiskelijalta vastauksen lisäksi perusteluita ja välivaiheita ja kyseiseen tehtävään tuli vastata MATLAB-ohjelmistoa käyttäen. Tentistä oli laadittu useita eri versioita, joista tehtäväkokonaisuus valikoitui jokaiselle satunnaisesti. Tehtävien vaikeustaso ja tyyppi säilyi kuitenkin samana jokaisen opiskelijan kohdalla.

Toisessa tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, miten opintonsa aloittavien insinöörien matematiikan perustaitojen osaaminen kehittyy kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson aikana. Lopputestin tehtävät 1–8 vastasivat kutakuinkin perustaitojen testin tehtäviä 3, 6, 8 ja 12–16, minkä vuoksi kyseiset tehtävät valikoituivat tutkimuskysymyksen 2 testaamiseen. Tehtävät poikkesivat toisistaan satunnaistettujen lukuarvojen verran. Tehtävien vastaavuudet ovat Taulukossa 5.1. Nämä kahdeksan tehtävää mittaavat opintojaan aloittavien insinöörien tarvitsemia matemaattisia taitoja, joita mitataan ensin lukuvuoden alussa, ja sitten kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson jälkeen lopputestissä. Vertailemalla näiden testien pisteitä opiskelijakohtaisesti päästään kiinni matemaattisen osaamisen kehittymiseen ensimmäisten insinöörimatematiikan opintojaksojen aikana. Toista tutkimuskysymystä käsittelevässä aineistossa mukana on vain tutkimusluvan saaneet ja molemmat perustaitojen testin sekä lopputestin tehneet opiskelijat. Näitä opiskelijoita testiryhmässä oli 164 ja verrokkiryhmässä 178.

Taulukko 5.1: Perustaitojen testin tehtävien vastaavuudet lopputestin tehtäviin.

Perustaitotestin tehtävä	Lopputestin tehtävä
3	1
6	2
8	3
12	4
13	5
14	6
15	7
16	8

Kolmannessa tutkimuskysymyksessä pyrittiin testaamaan, miten opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja Insinöörimatematiikka 2 aihealueiden matemaattinen osaaminen on kehittynyt lopputestiin mennessä. Aineistossa on mukana aina tutkimusluvan saaneet ja sekä tentin tehtävään, että lopputestin tehtäviin vastanneet opiskelijat. Opintojaksolla Insinöörimatematiikka 1 tentin tehtävää 1 ei vastannut yksikään lopputestin tehtävistä, joten kyseinen tehtävä jätettiin pois tarkastelusta. Tentin tehtävää 2 verrattiin lopputestin tehtävään 2. Tässä mittauspisteessä opiskelijoita oli testiryhmässä 164 ja verrokkiryhmässä 180. Tentin tehtävää 3 vastaavaksi tehtäväpaketiksi valikoituivat lopputestin tehtävät 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12 ja 13. Tehtäväpaketin tehtävät mittasivat tenttitehtävässä tarvittavia käsitteitä. Summamuuttujan ja tenttitehtävän pisteet skaalattiin samoiksi vertailukelpoisuuden saavuttamiseksi. Nämä tehtävät sekä tentissä että lopputestissä tehneitä opiskelijoita oli testiryhmässä 159 ja verrokkiryhmässä 199. Testiryhmän tentissä oli vain kolme tehtävää, joten tentin neljäs tehtävä karsiutui pois.

Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tentin tehtävää 1 verrattiin lopputestin tehtävään 16 ja tutkimukseen mukaan otettuja opiskelijoita oli testiryhmässä 176 ja verrokkiryhmässä 200. Tentin tehtävää 2 ei vastannut yksikään lopputestin tehtävistä, joten myös tämä tehtävä jätettiin tarkastelun ulkopuolelle. Tentin tehtävä 3 jätettiin sekin pois tutkimuksesta, sillä testiryhmä ei tehnyt tehtävää. Tentin tehtävä 4 puolestaan otettiin tutkimukseen mukaan verraten sitä lopputestin tehtäviin 14 ja 16. Summamuuttujan eli lopputestin tehtävien 14 ja 16 summan pisteet ja tentin tehtävän pisteet skaalattiin samoiksi, jotta ne olisivat vertailukelpoisia. Kyseiseen mittauspisteeseen otettiin näin ollen mukaan testiryhmästä 172 ja verrokkiryhmästä 172 opiskelijaa.

Tutkimukseen mukaan otettujen tenttien ja testien tehtävien tehtävänannot toimivat myös itsessään tutkimusaineistona, sillä ennen kuin toiseen ja kolmanteen tutkimuskysymykseen voidaan etsiä vastauksia vertailemalla testien pisteitä ja toisaalta tenttien ja testin pisteitä keskenään, täytyy ensin analysoida, millaista matemaattista osaamista tehtävät mittaavat. Tehtävänantoja tutkimalla pyritään vastaamaan ensimmäiseen tutkimuskysymykseen, jonka tarkoituksena on selvittää, minkälaista matemaattista osaamista tehtävät mittaavat. Tarkemmin tutkimuksessa mukana olleiden tenttien ja testien matemaattista sisältöä sekä testattuja matemaattisen osaamisen osa-alueita on kuvattu alaluvuissa 6.1 ja 6.2 Taulukoissa 6.1, 6.3 ja 6.4. Yhdet versiot testien ja tenttien tehtävänannoista tässä tutkimuksessa käsiteltävien tehtävien osalta löytyvät liitteistä (kts. LIITE A, LIITE B ja LIITE C).

5.3 Tutkimusmenetelmät

Tutkimuksen tekoon liittyy kiinteästi kirjallisuuskatsaus, minkä avulla on täsmennetty muun muassa tämän tutkimuksen tarpeellisuutta ja suhdetta aiempiin tutkimuksiin sekä tutkimuksen kannalta keskeisten käsitteiden määrittelyä. Tässä tutkimuksessa kartoitettiin ensin laadullisin keinoin tutkimusaineistosta, eli tenttien ja testien tehtävänannoista, millaista matemaattista osaamista ne mittaavat sekä Nissin ja Højgaardin että Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden malliin nojaten. Tehtävissä tarvittavan matemaattisen osaamisen osa-alueet tunnistettiin teorialähtöisen sisällönanalyysin keinoin. Tenttien ja testien tehtävistä analysoitiin luvussa 5.2 esitetyt tehtävät.

Kun tehtävien mittaama matemaattinen osaaminen oli selvillä, aineistoa tutkittiin määrällisin tilastollisen testaamisen menetelmin. Kun tutkimuksessa käytetään sekä laadullisia ja määrällisiä menetelmiä, voivat ne paikata toistensa puutteita, vaikkakin tutkimuksen teko on Tuomen ja Sarajärven [39, s. 78–79] mukaan kokonaisuus, eikä ole mielekästä erotella menetelmiä laadullisiin ja määrällisiin.

Laadullisen tutkimuksen tarkoituksena ei ole tarjota tilastollisesti yleistettäviä tuloksia, vaan sen avulla pyritään ymmärtämään syvällisemmin jotakin ilmiötä tai tapahtumaa. Laadullinen tutkimus on myös tapa teoretisoida jotakin ilmiötä. [39]. Tässä tutkimuksessa laadullisen tutkimuksen keinoin pyritään selvittämään tenttien ja testien tehtävänantojen perusteella niiden mittaama matemaattinen osaaminen sisällönanalyysiä hyödyntäen. Sisällönanalyysi voidaan määritellä kirjoitetun tekstin analysoinniksi ja siitä löytyvien merkitysten etsimiseksi. Sen avulla on tarkoitus tiivistää ja yleistää tutkittavaa aineistoa sanallisesti selkeään muotoon. Näin tuloksista voidaan tehdä luotettavammin päätelmiä.

Sisällönanalyysi koostuu aineiston purkamisesta pienempiin palasiin, sen käsitteellistämisestä ja kokoamisesta uudelleen selkeäksi kokonaisuudeksi. Tässä on tutkijan omalla loogisella päättelykyvyllä ja tulkinnalla suuri merkitys. Sisällönanalyysi on hyvin laaja käsite, ja tarkemmin tutkimuksessa on käytetty teorialähtöistä sisällönanalyysiä. Teorialähtöinen analyysi on yleisesti luonnontieteellisessä tutkimuksessa käytetty malli, missä analyysia ohjaa aiemmin luotu teoriapohja. Aineisto käsitteellistetään ilmiön eri ulottuvuuksiin sen ominaisuuksien avulla. [39, s. 103–128.] Tässä tutkimuksessa teoriapohjana analyysille toimivat Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden sekä Nissin ja Højgaardin mallit matemaattiselle osaamiselle. Tenttien ja testien tehtävänantoja analysoidaan etsien niistä matemaattisen osaamisen eri osa-alueiden ominaisuuksia, jotka on kuvattu alaluvussa 3.1.

Määrällisen tutkimuksen keinoin aineistoa käsitellään numeerisesti. Määrällinen tutkimusote soveltuu tutkimuksiin, joissa tutkimukseen osallistuu suuri määrä vastaajia. Tilastollisia menetelmiä käytettäessä osallistujia tulisi olla vähintään 100, jotta tulokset ovat paremmin yleistettävissä. Tässä tutkimuksessa on tarkoituksena selvittää kausaalisuhdetta opetusmenetelmän ja matemaattisen osaamisen kehittymisen välillä, mitä voidaan yleisesti pitää määrällisen tutkimuksen tunnuspiirteenä. [42, s. 14–23.]

Tilastollisessa testaamisessa testattavaa hypoteesia kutsutaan nollahypoteesiksi H_0, joka jää testien perusteella joko voimaan tai se hylätään. Tämän tutkimuksen nollahypoteesina on, että ryhmien välillä ei ole eroa matemaattisen osaamisen kehittymisessä. Tilastollisessa testaamisessa p-arvo kertoo, hylätäänkö nollahypoteesi vai ei. Mikäli saatu p-arvo on valittua merkitsevyystasoa alhaisempi, nollahypoteesi hylätään ja vastahypoteesi astuu voimaan. [24, s. 423, 435.] Tässä tutkimuksessa merkitsevyystasoksi valikoitui $p < 0,01$, mikä tarkoittaa tilastollisesti merkitsevää eroa. Tuloksissa tuodaan esiin myös tilastollisesti melkein merkitsevät ($p < 0,05$) tulokset, mutta merkityksellisempiä ovat valittua merkitsevyystasoa alhaisemmat p-arvot. Merkitsevyystasoa pienemmillä p-arvoilla astuu voimaan vastahypoteesi, eli ryhmien välillä onkin olemassa ero matemaattisen osaamisen kehityksellä. Valittua merkitsevyystasoa vastaa prosentuaalinen riskitaso, joka on nyt tässä tilanteessa valitulla merkitsevyystasolla 1 %. Riskitaso kuvaa riskiä hylätä nollahypoteesi virheellisesti. Tilastolliseen testaamiseen liittyy siis aina epävarmuutta. [24, s. 441.]

Määrällisen analyysin tarkoituksena on selvittää, miten insinöörien matematiikan perustaitojen matemaattinen osaaminen on kehittynyt kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson aikana sekä miten heidän kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson sisältöjen matemaattinen osaaminen on kehittynyt kyseisten opintojaksojen jälkeen. Tenttien ja testien tehtävien pisteet eivät olleet normaalijakautuneita, mikä todettiin Kolmogorov–Smirnovin testillä, joka soveltuu aineiston normaalijakautuneisuuden tutkimiseen [24, s. 979].

Koska aineisto ei ollut normaalijakautunut, testiryhmän ja verrokkiryhmän väliset analyysit suoritettiin ei-parametrisillä Mann–Whitneyn U-testillä ja niiden sisäiset analyysit Wilcoxonin testillä. Mann–Whitneyn U-testi on parametriton testi keskiarvojen erojen vertailuun, jota käytetään esimerkiksi otoskoon ollessa pieni. Testi ei myöskään oleta aineiston normaalijakautuneisuutta. [24, s. 385–386.] Wilcoxonin merkkitestillä saadaan vertailtua parittaisia otoksia. Kahta mittauspistettä eli kahta toisiaan vastaavaa havaintojoukon keskiarvoa vertaamalla saadaan näiden tilanteiden kehityksestä tietoa. Wilcoxonin testi sopii käytettäväksi, kun mittaus toistuu samankaltaisena ja toistokertojen tulokset ovat vertailtavissa ja laitettavissa suuruusjärjestykseen. [24, s. 1001, 1019.]

Wilcoxonin testillä testattiin siis aina kyseisen ryhmän kehitystä toisessa ja kolmannessa tutkimuskysymyksessä erikseen ja Mann-Whitneyn testillä puolestaan verrattiin ryhmien välisiä eroja osaamisen kehityksessä. Tuloksista laskettiin joitakin sijaintilukuja, jotka kuuluvat tilastollisiin tunnuslukuihin. Sijaintiluvuista tässä tutkimuksessa käytettiin moodia, mediaania ja aritmeettista keskiarvoa kuvaamaan tarkemmin kehitystä ja ryhmien välisiä eroja. Moodi voidaan määritellä eniten esiintyväksi muuttujan arvoksi, mediaani muuttujan jakauman keskimmäiseksi arvoksi ja aritmeettinen keskiarvo muuttujan arvojen keskimääräiseksi suuruudeksi. [42, s. 121–122.].

6 Tutkimuksen tulokset ja niiden analysointi

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen laadullisen sisällönanalyysin ja määrällisen tilastollisen testaamisen tulokset ja syvennytään tarkastelemaan niitä. Ennen tilastollisen analyysin tuloksia on hyvä tarkastella, millaista matemaattista osaamista tehtävät mittasivat ja miksi sekä eritellä tehtävien testaama matemaattinen sisältö. Aluksi siis vastataan ensimmäiseen tutkimuskysymykseen. Kun tiedetään, millaista osaamista kukin perustaitojen testin ja sitä vastaavan lopputestin tehtävä mittasivat, saadaan enemmän tietoa määrällisen analyysin tuottamista tuloksista ja matemaattisen osaamisen ulottuvuuksien kehityksen eroista. Seuraavaksi esitellään tulokset toiseen tutkimuskysymykseen eli matematiikan perustaitojen osaamisen kehittymiseen alaluvussa 6.1, jonka jälkeen tarkastellaan kolmanteen tutkimuskysymykseen liittyviä tuloksia kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson matemaattisen osaamisen kehittymisestä niiden jälkeen alaluvussa 6.2.

Käänteinen oppiminen on aikaisemmissa tutkimuksissa tuottanut parempia tenttituloksia sekä parannusta alkutesti–lopputesti-asetelmissa. Harvassa artikkelissa keskitytään sellaisten taitojen kehittymiseen arviointiin, kuten ongelmanratkaisutaito ja kriittinen tai luova ajattelu. Myöskään tämän tutkimuksen aihepiiristä eli käänteisen oppimisen pitkäaikaisista oppimistuloksista ei ole paljoa tutkimustietoa ja vertailukohtia. [29, s. 89–90.] Koska pidempiaikaisesta osaamisen kehittymisestä ei ole juuri aiempaa tutkimustietoa, asetettiin nollahypoteesiksi, että ryhmien välillä ei olisi eroa matemaattisen osaamisen kehittymisessä. Tuloksiin on otettu mukaan vain vähintään tilastollisesti melkein merkitsevät p-arvot ($p < 0,05$). Pääpaino on kuitenkin niillä tuloksilla, joissa p-arvo vastaa tilastollisesti merkitsevää eroa ($p < 0,01$).

6.1 Perustaitojen matemaattisen osaamisen kehittyminen

Matematiikan perustaitojen testin tehtävät on suunniteltu testaamaan ennen kaikkea opiskelijan proseduraalista sujuvuutta [16]. Tehtävät testaavat myös käsitteellistä ymmärtämistä, joka on avainasemassa tehtävätyypin proseduurin käyttämiseksi. Opiskelijan on ymmärrettävä tehtävän ratkaisemisen kannalta oleelliset käsitteet ja niiden väliset riippuvuudet. Tehtävän ratkaistakseen opiskelijan proseduurien on oltava selvillä ja hänen on omattava kyky soveltaa erilaisia ratkaisumenetelmiä kunkin ongelman ja käsitteen kohdalla tarkoitukseen sopivalla tavalla.

Perustaitotestin ja lopputestin tehtävät olivat luonteeltaan sellaisia, että proseduurien tehtävän ratkaisemiseksi tulisi olla opiskelijalle entuudestaan tuttuja lukiomatematiikasta eikä hänen täytynyt perustella ratkaisujaan. Tämän vuoksi opiskelijan mukautuvaa päättelyä tai strategista kompetenssia ei testattu kyseisillä testeillä. Myöskään opiskelijan matematiikkakuvaa ei testattu. Toki nämä tekijät ovat voineet olla joidenkin opiskelijoiden kohdalla testissä. Jos opiskelija omaa hiekommat taidot kuin testissä on oletettu, on hän voinut joutua hyödyntämään strategista kompetenssiaan selviytyäkseen tehtävästä. Tällöin kuvaan on voinut astua myös hänen matematiikkakuvansa uskomuksina matematiikasta ja itsestään suhteessa matematiikkaan. Lisäksi hän on voinut joutua turvautumaan mukautuvaan päättelyyn etsiessään käsitteiden välisiä yhteyksiä, jos proseduuri ei ole ollut entuudestaan vielä tuttu. Toisen tutkimuskysymyksen aineistoon valikoituneet testien tehtävät, niiden testaama matemaattinen sisältö sekä osaaminen löytyvät Taulukosta 6.1.

Taulukosta voidaan huomata, että matemaattisia perustietoja kartoittavan testin tehtävissä mitattiin ainoastaan käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden osa-alueita matemaattisesta osaamisesta. Tämän tutkimuksen aineiston avulla ei voida saada tietoa kaikista matemaattisen osaamisen osa-alueista, mikä on erittäin tärkeää tiedostaa tuloksia analysoitaessa. Matemaattinen osaaminen on paljon muutakin kuin ainoastaan käsitteiden ymmärtämistä ja sujuvia proseduureja, minkä vuoksi tutkimuksen tuloksia ei voida yleistää kattamaan täysin koko matemaattisen osaamisen kehittymistä matematiikan perustaitojen osalta.

Taulukko 6.1: Toisen tutkimuskysymyksen aineistossa käytettyjen matematiikan perustaitoja mittaavan lopputestin (LT) ja perustaitotestin (PTT) tehtävät, niiden matemaattinen sisältö ja niiden mittaama matemaattinen osaaminen.

LT tehtävä/ PTT tehtävä	Matemaattinen sisältö	Matemaattinen osaaminen (Kilpatrick ym. ja Joutsenlahti)	Matemaattinen osaaminen (Niss ja Højgaard)
1 / 3	Itseisarvolausekkeen sieventäminen	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
2 / 6	Yhdistetyn funktion arvo tietyssä pisteessä	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen suvujuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
3 / 8	Kolmannen asteen yhtälön ratkaisu	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen suvujuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
4 / 12	Trigonometrisen yhtälön ratkaisu tietyllä välillä (sini)	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
5 / 13	Trigonometrisen yhtälön ratkaisu tietyllä välillä (kosini)	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
6 / 14	Polynomifunktion derivointi	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
7 / 15	Polynomifunktion määrätty integraali	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
8 / 16	Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky

Nissin ja Højgaardin mallin mukaan tehtävien mittaama matemaattinen osaaminen voitaisiin tiivistää myös kahteen kompetenssiin: matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisun kompetensseihin. Opiskelija tarvitsee matemaattisen ajattelun kompetenssia tehtävissä, sillä hän tarvitsee nimenomaan kykyä tunnistaa, ymmärtää ja käyttää matemaattisten käsitteiden eri ulottuvuuksia ja hänen tulee ymmärtää, minkälaista vastausta häneltä odotetaan. Ongelmanratkaisukyvyn kompetenssi näkyy tarpeena osata havaita ja eritellä matemaattinen ongelma ja ratkaista se.

Ryhmän sisäinen matemaattisen osaamisen kehittyminen testattiin vertaamalla perustaitojen testin ja lopputestin vastaavaa tulosta opiskelijakohtaisesti. Ryhmien välinen vertailu tehtiin vertaamalla opiskelijakohtaista pistemäärien erotusta

$$\textit{Lopputestin tehtävän pistemäärä} - \textit{Perustaitotestin tehtävän pistemäärä}$$

ryhmien välillä. Mitä suurempi erotuksen arvo on, sitä paremmin lopputesti on opiskelijalla sujunut verraten perustaitojen testiin. Negatiivinen erotuksen arvo tarkoittaa, että opiskelijan pisteet ovat laskeneet perustaitotestistä lopputestiin. Erotuksen ollessa nolla pisteet ovat olleet samat, ja positiivinen arvo kertoo lopputestin pisteiden olleen korkeammat.

Perustaitotestin pisteitä vertailtiin lopputestin tehtävien pisteisiin, ja tulokset on taulukoitu Taulukkoon 6.2 ryhmäkohtaisten pisteiden erotusten keskiarvon, mediaanin ja moodin kanssa. Taulukossa on myös ryhmän sisäisen että niiden välisen kehityksen p-arvot. Lopputestin ja perustaitotestin pisteiden erotusten keskiarvot ovat kummallakin ryhmällä positiivisia jokaisen tehtävän kohdalla, mistä voidaan päätellä, että osaaminen on parantunut keskiarvojen perusteella kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson aikana.

Taulukko 6.2: Perustaitotestin (PTT) ja lopputestin (LT) tehtävien pisteiden erotuksen aritmeettinen keskiarvo = $\overline{x}$, mediaani = Md, moodi = Mo ja tehtäväparin välinen p-arvo ja erotuksen p-arvo testiryhmälle (T) ja verrokkiryhmälle (V). Tarkastelussa mukana ovat tilastollisesti merkitsevät ($p < 0,01$) muutokset. Tilastollisesti melkein merkitsevä ($p < 0,05$) tulos on sulkeissa.

LT tehtävät/ PTT tehtävä	Ryhmä	$\overline{x}$ (erotus)	Md (erotus)	Mo (erotus)	p	p (erotus)
1 / 3	T	0,061	0,000	0,000	(0,016)	0,001
	V	0,213	0,000	0,000	0,000	
2 / 6	T	0,244	0,000	0,000	0,000	0,002
	V	0,073	0,000	0,000	(0,042)	
3 / 8	T	0,091	0,000	0,000	0,005	-
	V	0,101	0,000	0,000	0,004	
4 / 12	T	0,396	0,000	0,000	0,000	-
	V	0,489	1,000	1,000	0,000	
5 / 13	T	0,433	1,000	1,000	0,000	-
	V	0,551	1,000	1,000	0,000	
6 / 14	T	0,037	0,000	0,000	-	-
	V	0,079	0,000	0,000	0,004	
7 / 15	T	0,415	0,500	1,000	0,000	(0,027)
	V	0,579	1,000	1,000	0,000	
8 / 16	T	0,122	0,000	0,000	0,003	0,000
	V	0,433	0,000	0,000	0,000	

Tilastollinen analyysi Wilcoxonin testillä osoitti, että testiryhmällä ($N = 164$) matemaattinen osaaminen kehittyi tilastollisesti merkitsevästi lopputestin tehtävissä 5 ja 7. Testiryhmän lopputestin pistemäärissä ei tapahtunut muutosta tehtävässä 1 tilastollisesti melkein merkitsevästi ja tehtävissä 2–4 sekä tehtävässä 8 tilastollisesti merkitsevästi. Verrokkiryhmällä ($N = 178$) matemaattinen osaaminen parantui tilastollisesti merkitsevästi lopputestin tehtävissä 4, 5, 7 ja 8. Tilastollisesti merkitsevä tulos oli myös, että pistemäärät eivät laskeneet tai nousseet verrokkiryhmällä lopputestin tehtävissä 1, 3 ja 6. Tehtävässä 2 pisteet olivat kutakuinkin samat verrokkiryhmän kummassakin testissä tilastollisesti melkein merkitsevästi.

Tilastollisesti merkitsevä ero erotuksissa ryhmien välillä oli Mann–Whitneyn U-testin mukaan lopputestin tehtävissä 1, 2 ja 8 ja tilastollisesti melkein merkitsevä ero tehtävässä 7. Näistä tehtävistä testiryhmän osaaminen parantui verrokkiryhmään nähden enemmän tehtävässä 2, jossa testiryhmän pisteiden erotus oli 235 % verrokkiryhmän arvoa suurempi. Tehtävissä 1, 7 ja 8 osaaminen parantui enemmän verrokkiryhmän opiskelijoilla. Lopputestin ensimmäisessä tehtävässä verrokkiryhmän keskiarvo oli 250 % testiryhmän vastaavaa arvoa suurempi. Verrokkiryhmän keskiarvo oli testiryhmän keskiarvoa korkeampi myös tehtävien 7 ja 8 osalta, missä erotuksen arvot olivat vastaavasti 40 % ja 255 % suurempia kuin testiryhmällä. Tehtävässä 4 verrokkiryhmän pisteiden erotusten mediaani ja moodi olivat testiryhmää yhden pisteen verran suuremmat, vaikka keskiarvoissa ei ollut suurta eroa. Pisteiden erotuksen mediaaneissa oli ryhmien välillä puolen pisteen ero lopputestin tehtävässä 7. Tässä tehtävässä ero keskiarvoissa oli hieman suurempi ja lisäksi ero ryhmien välillä oli myös tilastollisesti merkitsevä.

Tämän tutkimuksen tulokset eivät olleet täysin linjassa Tukholmassa KTH Royal Institute of Technology -yliopistossa vuonna 2015 tehdyn tutkimuksen kanssa. Tutkimuksen mukaan opintonsa aloittavien insinöörien matemaattiset perustaidot kehittyivät alkutesti–lopputestimittauksien välissä enemmän käänteistä opetusta käyttäneiden opiskelijoiden keskuudessa. Normalisoitu pisteiden kasvu testien välillä oli 13 % korkeampi Flipped classroom -ryhmällä. Verrokkiryhmän opetus oli perinteistä luento-opetusta, jossa heidän käytössään oli kutakuinkin sama oppimateriaali toisen ryhmän kanssa. Käänteisen oppimisen ryhmällä opetuksen osana käytettiin aktiivisia oppimistuokioita, joissa opiskelijat ratkaisivat ongelmia ja tekivät erilaisia tehtäviä. Ennen tapaamisia opiskelijan tuli aina katsoa lyhyt johdatteluvideon aiheeseen. [4, s. 113–121.]

Vastaavanlainen tutkimus suoritettiin Yhdysvalloissa vuosina 2012–2013, missä käänteisen opetuksen keinoin opiskellut kontrolliryhmä ($N = 22$) ja perinteisesti opiskellut verrokkiryhmä ($N = 23$) tekivät opintojakson alussa perustaitotestin ja sen jälkeen tentin, jossa oli osittain samat tehtävät kuin perustaitotestissä. Ryhmien välillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa pisteiden keskiarvoissa tai mediaaneissa, eli opiskelijoiden osaamisen tasossa ei juurikaan ollut eroa ryhmien välillä. Perinteisesti opiskelleen ryhmän opetus oli melko opettajajohtoista, vaikka opiskelijoita pyrittiin aktivoimaan esimerkiksi kysymyksin ja lyhyin keskustelutauoin. Käänteisen oppimisen menetelmällä opiskelleet katsoivat opetusvideoita ennen tapaamisia, joissa keskusteltiin videoista ja loppuaika käytettiin aktiiviseen työskentelyyn, kuten ryhmätöihin ja ongelmanratkaisuun. [44, s. 853–856.] Tämän tutkimuksen tulokset eivät siis ole täysin linjassa kummankaan aiemman tutkimuksen tulosten kanssa, vaikkakin tämän tutkimuksen otoskoko on huomattavasti suurempi kuin Yhdysvalloissa tehdyn tutkimuksen.

6.2 Kahden ensimmäisen matematiikan opintojakson aihealueiden matemaattisen osaamisen kehittyminen

Kuten matematiikan perustaitotestissä ja lopputestissä, myös opintojaksojen Insinöörimatematiikka 1 ja 2 tenteissä mitattiin opiskelijan omaavaa käsitteellistä ymmärtämistä ja proseduraalista sujuvuutta. Tämän lisäksi opintojakson Insinöörimatematiikka 1 tentissä testattiin opiskelijoiden mukautuvaa päättelyä, sillä heiltä vaadittiin perusteluja ratkaisuihinsa. Tehtävä 3 sisälsi todistusosuuden, mikä vaati myös mukautuvaa päättelyä. Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tentin ensimmäinen tehtävä mittasi myös strategisen ja mukautuvan päättelyn taitoja, sillä tehtävä oli rakennettu mittaamaan opiskelijoiden taitoa soveltaa tiedossa olevia käsitteitä ja nähdä näiden välisiä yhteyksiä. Tentin tehtävä 4 vaati opiskelijalta perusteluja ja näin mukautuvan päättelyn taitoa.

Tenteissä voidaan tarvita opiskelijalta hänen strategista kompetenssiaan, jos hän ei osaa ratkaista kyseistä tehtävätyyppiä. Yksilön matematiikkakuva vaikuttaa aina taustalla, kun hän ratkoo matemaattisia ongelmia ja on tekemisissä matematiikan kanssa. Kuinka opiskelija kokee matematiikan ja itsensä matematiikan käyttäjänä ja oppijana, vaikuttaa tehtävien ratkaisemiseen. Jos opiskelija kokee matematiikan liian vaikeaksi tai itsensä kykenemättömänä ratkomaan sen ongelmia, ei itselle haastavaan tehtävään jakseta kuluttaa aikaa tai vaivaa, vaan sen suhteen luovutetaan herkemmin. Tässä mielessä matematiikkakuva on hyvin ratkaisevassa roolissa tenttitilanteessa, vaikka tämä tentti ei sen kehitystä tai tasoa pystykään mittaamaan.

Insinöörimatematiikka 1 opintojakson tentissä testattiin Nissin ja Højgaardin mallin mukaisista matemaattisen osaamisen osa-alueista esittämisen, matemaattisen ajattelun, matemaattisen päättelyn, vuorovaikutuksen ja ongelmanratkaisukyvyn kompetensseja. Matemaattisen päättelyn kompetenssia tarvittiin tentissä oman perustelun tuottamiseen, sen kriittiseen arviointiin sekä todistamiseen. Esittämisen kompetenssin avulla opiskelija pystyi valitsemaan tilanteeseen sopivan esitysmuodon vastaukselleen ja ymmärtämään erilaisia esitysmuotoja tehtävänannossa. Vuorovaikutuksen kompetenssi tarjosi työkalut matematiikan kirjalliseen ilmaisuun sekä tehtävänannon ilmauksien ymmärtämiseen.

Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tentissä testattiin hieman toisistaan poikkeavia kompetensseja tehtävästä riippuen. Ensimmäinen tehtävä testasi matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisun kompetenssien lisäksi matemaattisen päättelyn kompetenssia. Tehtävä 4 testasi edellisten lisäksi myös matemaattisen päättelyn, esittämisen, vuorovaikutuksen ja apuvälineiden käytön kompetensseja. Tehtävässä 4 vaadittiin useampia osaamisen osa-alueita, sillä tehtävään vaadittiin perusteltuja välivaiheita ja tehtävä tuli tehdä MATLAB-ohjelmistoa käyttäen. Ohjelmiston asianmukainen käyttö ja sen hyötyjen tiedostaminen ja käyttö kuuluivat apuvälineiden käytön kompetenssiin.

Taulukko 6.3: Kolmannen tutkimuskysymyksen aineistossa käytettyjen opintojakson Insinöörimatematiikka 1 (IMA 1) tentin tehtävä ja sitä vastaava lopputestin (LT) tehtävä tai tehtäväpaketti, niiden matemaattinen sisältö ja niiden mittaama matemaattinen osaaminen.

IMA 1 tentin tehtävä/ LT tehtävät	Matemaattinen sisältö	Matemaattinen osaaminen (Kilpatrick ym. ja Joutsenlahti)	Matemaattinen osaaminen (Niss ja Højgaard)
2 / 2	Yhdistetyn funktion määrittäminen	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky
3 / 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13	Derivaatta, raja-arvo, trigonometriset funktiot ja määrätty integraali	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky

Taulukoissa 6.3 ja 6.4 tenttien tehtävien matemaattinen sisältö on eritelty siten, että nämä sisällöt löytyvät sekä tentistä että lopputestin tehtävästä tai tehtäväpaketista. Matemaattinen osaaminen verrattavien tehtävien osalta on valittu niin, että samaa osaamista testataan kummassakin vertailukohdassa. Vaikka tenttitehtävässä mitattaisiinkin myös mukautuvan päättelyn osa-aluetta, ei lopputestin tehtävien avulla päästä mittaamaan tätä ulottuvuutta. Näin ollen verrattaessa tentin tehtävän pisteitä sitä sisällöllisesti vastaavan lopputestin tehtävän tai tehtäväpaketin pisteisiin ei voida saada tietoa mukautuvan päättelyn kehityksestä. Siispä se jätetään pois tarkastelusta. Vastaavasti Nissin ja Højgaardin mallin kompetenssien kehittymistä voidaan verrata ainoastaan sekä tentin että lopputestin sisältämien kompetenssien osalta. Näitä yhteisiä kompetensseja ovat matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisukyvyn kompetenssit.

Kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson matemaattisen osaamisen kehittymistä tutkittiin siis vertailemalla tentin tehtävän pisteitä opiskelijakohtaisesti lopputestin tehtävän pistemäärään. Näin testattiin ryhmän sisäistä kehitystä matematiikan taidoissa. Ryhmien välisiä eroja pisteissä tutkittiin tarkastelemalla opiskelijakohtaista erotusta

$$\textit{Lopputestin tehtävän/tehtäväpaketin pistemäärä} - \textit{Tentin tehtävän pistemäärä}.$$

Taulukko 6.4: Kolmannen tutkimuskysymyksen aineistossa käytettyjen opintojakson Insinöörimatematiikka 2 (IMA 2) tentin tehtävä ja sitä vastaava lopputestin (LT) tehtävä tai tehtäväpaketti, niiden matemaattinen sisältö ja niiden mittaama matemaattinen osaaminen.

IMA 2 tentin tehtävä/ LT tehtävät	Matemaattinen sisältö	Matemaattinen osaaminen (Kilpatrick ym. ja Joutsenlahti)	Matemaattinen osaaminen (Niss ja Højgaard)
1 / 16	Matriisin determinantti, nolla- tai sarakeavaruuden dimensio, kääntyvyys, ominaisarvot, matriisiyhtälö ja lineaarikombinaatio	Käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus,	Matemaattinen ajattelu, ongelmanratkaisukyky,
4 / 14, 16	Matriisin ominaisarvot, ominaisvektorit ja diagonalisoituvuus	Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus	Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisukyky

Mitä suurempi erotuksen arvo on, sitä paremmin lopputesti on opiskelijalla sujunut verraten kyseisen tentin tehtävän pistemäärään. Negatiivinen erotuksen arvo tarkoittaa, että opiskelijan pisteet ovat laskeneet tentistä lopputestiin. Erotuksen ollessa nolla pisteet ovat olleet samat, ja positiivinen arvo kertoo lopputestin pisteiden olleen korkeammat.

Taulukko 6.5: IMA 1 tentin ja lopputestin (LT) tehtävien pisteiden erotuksen aritmeettinen keskiarvo = $\bar{x}$, mediaani = Md, moodi = Mo ja tehtäväparin välinen p-arvo ja erotuksen p-arvo testiryhmälle (T) ja verrokkiryhmälle (V). Tarkastelussa on mukana tilastollisesti merkitsevät ($p < 0,01$) muutokset. Sulkeisiin on merkitty myös tilastollisesti melkein merkitsevät ($p < 0,05$) tulokset

IMA 1 tentin tehtävä/ LT tehtävät	Ryhmä	$\bar{x}$ (erotus)	Md (erotus)	Mo (erotus)	p	p (erotus)
2 / 2	T	0,390	0,417	0,500	0,000	(0,047)
	V	0,323	0,333	0,417	0,000	
3 / 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13	T	0,101	0,042	0,000	0,005	0,000
	V	-0,057	-0,042	0,000	(0,012)	

Opintojakson Insinöörimatematiikka 1 tentin tehtävien 2 ja 3 pisteitä verrattiin lopputestin tehtävien pisteisiin, ja tulokset on taulukoitu Taulukkoon 6.5 ryhmäkohtaisten pisteiden erotusten keskiarvon, mediaanin ja moodin sekä ryhmän sisäisen että välisen kehityksen p-arvojen kanssa. Tentin tehtävän 2 vertailu lopputestin tehtävän 2 pisteisiin Wilcoxonin testillä paljasti, että molemmilla ryhmillä pisteet olivat nousseet lopputestiin tilastollisesti merkitsevästi ($p = 0.000$), mikä näkyy positiivisina pisteiden erotusten keskiarvoina. Testiryhmän ($N = 164$) pisteet nousivat tentistä lopputestiin verrokkiryhmää ($N = 180$) enemmän tilastollisesti melkein merkitsevästi Mann–Whitneyn U-testin perusteella ($p = 0.047$). Testiryhmän keskiarvo oli pisteiden erotuksille 21 % verrokkiryhmän arvoa suurempi. Tämän lisäksi testiryhmän mediaanin ja moodin arvot olivat verrokkiryhmää korkeampia.

Opintojakson tentin tehtävää 3 verratessa lopputestin tehtäväpakettiin tilastollisesti merkitseväksi tulokseksi saatiin, että testiryhmän ($N = 159$) lopputesti sujui tenttiä paremmin Wilcoxonin testin nojalla ($p = 0.005$). Saman testin perusteella verrokkiryhmän ($N = 199$)

lopputestin pisteet olivat tämän tehtävän osalta tentin pisteitä huonommat ($p = 0.012$) tilastollisesti melkein merkitsevästi. Ryhmien välillä tilastollisesti merkitseväksi tulokseksi nousi Mann–Whitneyn U-testillä testiryhmän osaamisen kehittyminen tentistä lopputestiin verrokkiryhmää enemmän ($p = 0.000$). Pisteiden erotus laskettiin vastaavasti kuin tenttitehtävälle 2. Tehtävässä 3 puolestaan keskiarvojen mukaan osaaminen ei parantunut molemmilla ryhmillä, koska verrokkiryhmän erotuksen arvo oli negatiivinen, minkä mukaan ryhmän osaaminen oli heikentynyt lopputestiin. Myös mediaanin arvo oli testiryhmällä suurempi kuin verrokkiryhmällä.

Taulukko 6.6: IMA 2 tentin ja lopputestin (LT) tehtävien pisteiden erotuksen aritmeettinen keskiarvo = $\bar{x}$, mediaani = Md, moodi = Mo ja tehtäväparin välinen p-arvo ja erotuksen p-arvo testiryhmälle (T) ja verrokkiryhmälle (V). Tarkastelussa on mukana tilastollisesti merkitsevät ($p < 0,01$) muutokset. Sulkeisiin on merkitty myös tilastollisesti melkein merkitsevät ($p < 0,05$) tulokset

IMA 2 tentin tehtävä/ LT tehtävät	Ryhmä	$\bar{x}$ (erotus)	Md (erotus)	Mo (erotus)	p	p (erotus)
1 / 16	T	-0,105	-0,163	-0,170	0,000	-
	V	-0,185	-0,165	0,000	0,000	
4 / 14, 16	T	-0,144	-0,167	-0,168	0,000	(0,010)
	V	-0,048	-0,083	-0,335	(0,019)	

Opintojakson Insinöörimatematiikka 2 tentin tehtävien 1 ja 4 pisteitä vertailtiin lopputestin tehtävien pisteisiin, ja tulokset on taulukoitu Taulukkoon 6.6 ryhmäkohtaisten pisteiden erotusten keskiarvon, mediaanin ja moodin sekä ryhmän sisäisen että välisen kehityksen p-arvojen kanssa. Tentin tehtävää 1 verrattiin lopputestin tehtävään 16. Ryhmien sisäinen kehitys oli tilastollisesti merkitsevää kummallakin ryhmällä. Tässä mittauspisteessä kummallakin ryhmällä ($N_T = 176$) ja ($N_V = 200$) opiskelijan pistemäärä oli laskenut tilastollisesti merkitsevästi tentin pisteistä lopputestin tehtävän pisteisiin ja kummallakin ryhmällä Wilcoxonin merkkitestin perusteella ($p = 0.000$). Tämä havaitaan myös negatiivisista pisteiden erotusten keskiarvoista. Ero ryhmien välillä ei kuitenkaan ollut tilastollisesti merkitsevä Mann–Whitneyn U-testin mukaan. Testiryhmän mediaani ja moodi olivat verrokkiryhmän arvoja alhaisemmat, joskin mediaanin arvo vain todella pienellä marginaalilla.

Tentin tehtävää 4 verrattiin lopputestin tehtäväpakettiin, joka koostui sen tehtävistä 14 ja 16. Wilcoxonin testi osoitti, että tässäkin tehtävässä opiskelijoiden pisteet laskivat sekä testi- että verrokkiryhmällä tentin pisteistä lopputestin pisteisiin, mikä näkyy myös negatiivisina erotusten keskiarvoina. Tulokset olivat testiryhmälle tilastollisesti merkitseviä ($N = 172$) $p = 0.000$ ja verrokkiryhmälle tilastollisesti melkein merkitseviä ($N = 172$) $p = 0.019$. Ryhmien välinen ero tutkittiin vastaavasti kuin ensimmäisen opintojakson kohdalla Mann–Whitneyn U-testillä. Ero oli sekin tilastollisesti melkein merkitsevä ($p = 0.010$) ja verrokkiryhmän pisteet laskivat tässä tapauksessa testiryhmän pisteitä vähemmän. Verrokkiryhmän osaaminen ei siis laskenut niin paljoa kuin testiryhmällä. Tulokset mediaanin ja moodin osalta jakautuivat ryhmien välillä niin, että alhaisempi arvo mediaanissa oli testiryhmällä ja moodissa taas verrokkiryhmällä.

Tutkimuksen tulokset on tiivistettynä Taulukkoon 6.7, jossa matemaattisella osaamisella tarkoitetaan vain kahta matemaattisen osaamisen osa-aluetta: käsitteellistä ymmärtämistä ja proseduraalista sujuvuutta Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden mukaan. Tämän tutkimuksen puitteissa on mahdollista tutkia vain näiden kahden ulottuvuuden kehittymistä. Taulukossa luokitellaan matemaattisen osaamisen kehitys lopputestiin nähden niin, että osaaminen joko parani, säilyi samana tai heikkeni vertailussa. Osaaminen saattoi olla toista ryhmää parempaa verratessa pisteiden erotusta. Taulukkoon on koottu tehtävien lukumäärät näihin neljään kategoriaan, joissa

Taulukko 6.7: Matemaattisen osaamisen kehitys vertailussa lopputestiin perustaidoissa sekä opintojaksoilla Insinöörimatematiikka 1 (IMA 1) ja 2 (IMA 2) testiryhmällä (T) ja verrokkiryhmällä (V). Taulukoituna on vertailun tehtävien lukumäärä, joissa matemaattinen osaaminen joko parani, säilyi samana tai heikkeni ja kuinka monessa tehtävässä osaaminen oli toista ryhmää parempi. Tehtävät, joille $p \geq 0,01$ on esitetty sulkeissa.

Matemaattinen osaaminen	Perustaidot		IMA 1		IMA 2	
	T	V	T	V	T	V
Parani	2/8	4/8	2/2	1/2	-	-
Säilyi samana	4/8 (2/8)	3/8 (1/8)	-	-	-	-
Heikkeni	-	-	-	(1/2)	2/2	1/2 (1/2)
Kehittyi enemmän kuin toisella ryhmällä	1/8	2/8 (5/8)	1/2 (1/2)	-	-	(2/2)

tulokset olivat tilastollisesti merkitseviä ($p < 0,01$). Sulkeissa on esitetty lisäksi niiden tehtävien sijoittuminen, joissa tulokset eivät ole vaaditulla merkitsevyystasolla. Vaikka nämä tulokset ovatkin $p \geq 0,01$, niin ne ovat suuntaa antavia ja osoittavat loppujen tehtävien jakautumisen. Perustaitojen osaamisen kehittymistä on tutkittu vertaillen kahdeksaa tehtävää ja Insinöörimatematiikka 1 ja 2 opintojaksojen kohdalla vertailuun on käytetty kummankin kohdalla kahta tehtävää. Osaamisen jakautuminen ja suhde toiseen ryhmään on lisäksi lajiteltu ryhmittäin testi- ja verrokkiryhmälle erikseen.

7 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi

Tässä luvussa tarkastellaan tämän tutkimuksen kokonaisluotettavuutta, joka koostuu tutkimuksen reliabiliteetistä ja validiteetista. Reliabiliteetillä tarkoitetaan tutkimuksen ja sen tulosten toistettavuutta ja validiteetillä puolestaan, onko tutkimuksessa tutkittu sitä, mitä pitikin. [42, s. 149–152.] Laadullisen tutkimuksen yhteydessä ei ole aina luontevaa käyttää termejä reliabiliteetti ja validiteetti, koska käsitteet ovat alunperin muotoutuneet määrällisen tutkimuksen tarkoitusperiin [39, s. 160]. Kuitenkin tämän tutkimuksen kohdalla laadullisen puolen luonteen vuoksi voidaan myös laadullisia menetelmiä arvioidessa käyttää termejä reliabiliteetti ja validiteetti. Saadut tutkimustulokset ovat aina sidoksissa niiden toteutuksen aikaan ja paikkaan. Tutkimus ei välttämättä ole toistettavissa samoilla tuloksilla seuraavana vuonna eri osallistujilla.

Tutkimuksen laadullisessa osuudessa tutkittiin teorialähtöisen sisällönanalyysin keinoin tehtävien mittaamaa matemaattista osaamista tehtävänantojen perusteella. Jos tutkimus toistettaisiin samantyyppisillä tehtävillä, vaikkakin esimerkiksi eri lukuarvoilla ja eri osallistujilla, mittaisivat tehtävät edelleen samoja opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia. Tutkimuksen määrällinen aineisto, eli tenttien ja testien tehtävien pistemäärät, riippui eritoten ajasta, paikasta ja tehtävän tekijästä. Näin ollen saadut tulokset eivät tältä osin välttämättä olisi toistettavissa, vaikkakin otoskoko oli suhteellisen suuri kaikissa mittauspisteissä.

Tutkimuksessa onnistuttiin melko hyvin mittaamaan sitä, mitä oli tarkoituskin sopivasti valittujen menetelmien avulla. Laadullisin keinoin saatiin ensin tietoa siitä, millaisen matemaattisen osaamisen kehittymistä tässä tutkimuksessa pystyttiin ylipäätään tutkimaan. Tutkimuksessa saatiin tulokset kaikkiin tutkimuskysymyksiin ja saatiin vertailtua osaamisen eroja sekä ryhmien sisällä että niiden välillä määrällisten menetelmien avulla. Tutkimuksessa haluttiin saada tietoa matemaattisen osaamisen kehittymisestä perustaitojen sekä kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson sisältöjen hallinnasta niiden päätyttyä. Matemaattisen osaamisen ollessa hyvin monitahoinen käsite, ei tällä tutkimuksella saatu tietoa kaikkien matemaattisen osaamisen osa-alueiden kehittymisestä. Tätä rajoitti erityisesti lopputestin tehtävä- ja vastaustyypit.

Lähtökohdat matemaattisen osaamisen mittaamiselle eivät olleet täysin tasapuoliset ryhmien välillä. Testiryhmän opiskelijoita kannustettiin harjoittelemaan perustaitotestiä varten, ja he saivat harjoittelusta pisteitä. Samalla sähköiset ohjelmat testin tekoa varten tulivat tutummiksi. Testiryhmä sai alunperin korkeammat pisteet perustaitotestistä, mikä on tärkeää ottaa huomioon kehitystä tutkiessa. Luonnollisesti tällöin useassa mittauspisteessä havaittiin tulos, jonka mukaan verrokkiryhmän matemaattinen osaaminen oli kasvanut testiryhmää enemmän.

Tutkimuksessa tulee myös ottaa huomioon vastausprosentti ja tutkimuksessa tapahtunut kato perusjoukon ja otoksen välillä. Jo tutkimukseen osallistuminen oli opintojaksoilla vapaaehtoista. Aineistossa oli todellisuudessa vielä tätäkin vähemmän opiskelijoita, koska perustaitojen osaamisen kehityksen osalta mukaan otettiin näistä ainoastaan ne opiskelijat, jotka olivat tehneet sekä perustaitotestin että lopputestin. Opintojaksojen IMA 1 ja 2 osaamisen kehitystä testattaessa huomioitiin ne opiskelijat, jotka olivat tutkimusluvan antamisen lisäksi tehneet kyseisen tenttitehtävän ja siihen verrattavia lopputestin tehtäviä. Näin ollen tutkimusluvallisista huomioitiin perustaitojen osalta testiryhmästä 78 % ja verrokkiryhmästä 72 %. Opintojakson IMA 1 tenttitehtävän 2 osalta huomioitiin testiryhmästä 78 % ja verrokkiryhmästä 73% sekä vastaavasti tenttitehtävässä 3 huomioitiin 76 % ja 80 % opiskelijoista. Opintojakson IMA 2 opiskelijoista tutkimuksen aineistoon tenttitehtävän 1 osalta 81 % testiryhmäläisiä ja 80 % verrokkiryhmäläisiä sekä tenttitehtävän 4 vastaavat prosentit olivat 80 % ja 68 %. Aineiston suuri koko parantaa tulosten luotettavuutta tilastollisia menetelmiä käytettäessä, mutta edelleenkään tulokset eivät ole yleistettäviä vaan ennemmin suuntaa antavia.

Tutkimuksessa ei pystytty mittaamaan eroja matemaattisen osaamisen osa-alueiden välillä. Olisi mielenkiintoista tietää, onko ryhmien välillä eroja jonkin tietyn matemaattisen osaamisen osa-alueen välillä eli kehittyykö toisella menetelmällä jokin osa-alue toista ryhmää paremmin. Nyt vertailtavat tehtävät mittasivat samoja matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia.

Lisäksi tutkimuksessa vertailtiin ainoastaan kahden tenttitehtävän aihealueen matemaattisen osaamisen kehitystä kummankin insinöörimatematiikan opintojakson osalta, mikä ei antanut luotettavaa kuvaa koko opintojakson sisällön osaamisesta ja sen kehityksestä. Tenttitehtävistä ei ollut eriteltynä pistemääriä alakohdittain, joten vertailukohdaksi ei aina sopinut yksittäinen tehtävä, vaan vertailuun valikoitui suurempi joukko lopputestin tehtäviä vastaamaan parhaiten kaikkia tentin tehtävän sisältöjä. Tarkempaa tietoa tietyn aihealueen osaamisen kehityksestä olisi saatu, jos pisteitä olisi ollut alakohdittain. Tietyn aihealueen sisällä tapahtuneesta kehityksestä olisi saatu paremmin tietoa myös, jos lopputestissä olisi ollut tismalleen samat tehtävät kuin tentissä. Tämä olisi myös laajentanut matemaattisen osaamisen osa-alueita, joita tutkimuksessa olisi voitu vertailla.

Tutkimuksen toteutus suunniteltiin ja aineisto käsiteltiin huolellisesti. Tutkimukseen osallistuneet olivat kaikki tutkimusluvallisia, eli tutkimukseen osallistuminen oli vapaaehtoista. Pisteitä käsiteltiin anonyymisti ja tutkimuksen toteutus sekä raportointi suoritettiin noudattaen hyvää tieteellistä käytäntöä, joka koskettaa sekä laadullista että määrällistä tutkimusta [42, s. 90–92]. Tutkimuksen tulokset raportoitiin totuudenmukaisesti, ja tutkimusprosessin aikana eteen tulleet rajoitteet ja haasteet raportoitiin rehellisesti tutkimuksen läpinäkyvyyttä ajatellen.

Tuloksia ei voida pitää täysin luotettavina mittareina matemaattiselle osaamiselle, koska arvioinnin tulee olla alaluvun 3.4 nojalla monipuolista, kannustavaa, tukea opiskelijan matematiikkakuvaa sekä arvioinnilla ei tule testata vain lyhytaikaisen muistin kapasiteettia. Tässä tutkimuksessa osaamisen mittaaminen perustuu tenttien ja testien pistemääriin, jotka antavat melko yksipuolisen kuvan matemaattisesta osaamisesta. Tentti on aina jonkun laatima eikä näin ollen ole välttämättä täysin tasapuolinen. Tentissä ja testissä ei aina ole mahdollista näyttää kaikkea osaamistaan, sillä ne sisältävät vain sen laatijan näkemyksen keskeisestä sisällöstä.

8 Pohdinta

Tässä luvussa pohditaan tutkimuksen tuloksiin vaikuttavia tekijöitä, kuten tutkimuksen luotettavuutta sekä matemaattisen osaamisen ulottuvuuksien ja matemaattisen sisällön suhdetta tuloksiin. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, kumman ryhmän toteutus tukee insinöörimatematiikan matemaattisen osaamisen kehittymistä paremmin missäkin tilanteessa ja ylipäätään millaista kehitystä matemaattiselle osaamiselle tapahtuu missäkin aihepiirissä.

Jotta tavoitteet voitaisiin saavuttaa, vertailtiin käänteistä oppimista ja toisaalta hybridimallia seuraavien opintojaksojen tenttien ja testien pistemääriä. Ensimmäisen tutkimuskysymyksen avulla haluttiin selvittää, minkälaista matemaattista osaamista tutkimuksessa vertailun kohteena olleet tehtävät oikeastaan mittasivat. Matemaattisen osaamisen kentästä kyettiin tutkimaan pääasiassa vain käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden kehitystä tai matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisukyvyn kompetenssien kehitystä riippuen määritelmästä. Ensimmäiset osa-alueet kuuluivat Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden määritelmään matemaattiselle osaamiselle ja jälkimmäiset Nissin ja Højgaardin malliin (kts. alaluku 3.1). Toisella tutkimuskysymyksellä etsittiin vastausta siihen, kuinka matematiikan perustaitojen osaaminen kehittyi opintojensa aloittavilla insinööreillä kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson aikana. Kolmas tutkimuskysymys asetettiin testaamaan, kuinka kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson sisältöjen matemaattinen osaaminen kehittyi näiden aikana.

Tulosten mukaan matematiikan perustaitojen käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus kehittyivät kahden ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson aikana sekä hybridimallilla opiskelleen verrokkiryhmän että käänteisen oppimisen keinoin opiskelleen testiryhmän opiskelijoilla. Vähintään tilastollisesti melkein merkitsevästi osaaminen kehittyi kahdessa tehtävässä kahdeksasta. Tilastollisesti melkein merkitsevää oli myös pisteiden säilyminen testiryhmän opiskelijoilla lopputestissä lähes samana kuin perustaitotestissä neljässä tehtävässä. Tilastollisesti merkitsevästi osaaminen kehittyi verrokkiryhmällä jopa neljässä tehtävässä kahdeksasta ja lopuissa tehtävissä pistemäärissä ei tapahtunut muutosta tilastollisesti melkein merkitsevästi. Verrokkiryhmän osaaminen kehittyi testiryhmää enemmän kolmessa tehtävässä. Testiryhmän osaaminen puolestaan kasvoi enemmän ainoastaan yhdessä tehtävässä. Perustaitojen osaamisen kehittymistä pidemmällä aikavälillä tuki tämän tutkimuksen tulosten mukaan siis paremmin hybridimalli, vaikka kummankin ryhmän osaaminen parantui.

Perustaitotesti suoritettiin sähköisesti, ja järjestelmät olivat opiskelijoille vielä verrattain uusia, mikä voi vaikuttaa tuloksiin. Lukuvuoden edetessä järjestelmät kävivät tutummaksi, minkä jälkeen ne tuskin enää vaikuttivat lopputestin tai toisen matematiikan opintojakson tentin tehtävistä saatuihin pisteisiin. Testiryhmän opiskelijat saivat harjoitella perustaitotestiä varten etukäteen saaden pisteitä suorituksistaan. Samalla sähköinen ympäristö tehtävien tekemiseen tuli tutuksi. Näin ollen testiryhmän pisteet perustaitotestissä olivat verrokkiryhmää paremmat. Verrokkiryhmän parempi osaamisen kehittyminen suhteessa testiryhmään voikin selittyä osittain tällä, sillä aiemmissa tutkimuksissa osaaminen on kasvanut käänteistä oppimista hyödyntäneillä enemmän [4]. Paremmasta alkuasetelmasta huolimatta käänteisen oppimisen ryhmän matemaattinen osaaminen kehittyi sekin lopputestiin verraten.

Ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson sisällön matemaattinen osaaminen kehittyi käänteisen opetuksen menetelmällä myös pidemmällä aikavälillä. Testiryhmän pisteet nousivat tilastollisesti merkitsevästi kummassakin mittauspisteessä, kun taas verrokkiryhmällä osaaminen parani vain toisessa. Verrokkiryhmällä osaaminen parantui myös yhdessä tehtävässä, mutta derivointia, raja-arvoa, trigonometrisia funktioita ja määrättyä integraalia testaavassa tehtävässä osaaminen sitä vastoin heikkeni. Testiryhmän osaaminen parantui kummassakin tapauksessa verrokkiryhmän osaamista enemmän.

Toisen insinöörimatematiikan opintojakson aiheet olivat opintonsa aloittaville insinööreille luultavasti uusia. Tulosten mukaan osaaminen heikkeni tentistä lopputestiin kummallakin ryhmällä vähintään tilastollisesti melkein merkitsevästi molemmissa mittauspisteissä. Toisessa tenttitehtävässä verrokkiryhmän suoritus heikkeni testiryhmän suoritusta vähemmän. Ensimmäisten insinöörimatematiikan opintojaksojen aihealueiden osaamisen kehittymistä parhaiten tukeva toteutus riippui siis jaksosta. Ensimmäisellä opintojaksolla käänteinen oppiminen mahdollisti suuremman osaamisen kehityksen. Toisella opintojaksolla osaaminen heikkeni molemmilla ryhmillä, mutta hieman vähemmän osaaminen heikkeni verrokkiryhmällä.

Hybridimallilla opiskelleet kehittyivät matemaattiselta osaamiseltaan perustaidoissaan testiryhmää useammassa tehtävässä. Käänteisen oppimisen keinoin matemaattinen osaaminen kehittyi paremmin IMA 1 -opintojakson sisältöjen parissa. IMA 1 käsitteli osittain jo entuudestaan aiemmista matematiikan opinnoista tuttuja aihepiirejä. Tässä tutkimuksessa testattiin opintojakson aihepiireistä nimenomaan entuudestaan tuttuja perustaitoja, joiden osaaminen luultavasti tulee kehittymään matematiikan opintojen aikana myös yliopistossa, kun ne ovat aktiivisessa käytössä, vaikka aiheet eivät olisikaan seuraavalla opintojaksolla pääosassa. Mielenkiintoinen tulos on, että IMA 2 -opintojaksolla osaaminen ei kehittynyt aiemman jakson sisällön osaamisen tavoin positiiviseen suuntaan, vaan heikkeni kummallakin ryhmällä. Tähän voi vaikuttaa, että vertailussa oli vain kaksi tentin tehtävää, mikä ei kata kovinkaan laajasti opintojakson sisältöjä ja että aihe oli vieras opiskelijoille ennen insinöörimatematiikan alkua.

Hybridimallin arvioinnissa lopputentillä oli suurempi painoarvo, minkä voisi kuvitella vaikuttavan tentin tehtävistä saatuihin pisteisiin. Opiskelijat lukivat luultavasti verrokkiryhmässä tenttiin testiryhmää enemmän, sillä testiryhmäläisten opintojakson arvioinnissa painotettiin enemmän jakson aikana tapahtuvaa työtä. Testiryhmäläisillä ei ollut siis niin suurta tarvetta viimehetken opiskeluun ja pänttäämiseen, vaan tentti oli enemmän arvosanan korotusmahdollisuus. Tämä voisi selittää ensimmäisen opintojakson kohdalla osaamisen kehittymisen erot ryhmien välillä, minkä mukaan käänteinen oppiminen tuki oppimista paremmin pitkällä tähtäimellä, kun opiskelua ei painotettu tenttiä edeltäviin hetkiin. Toisen opintojakson osaamisen vertailun välissä kulunut aika oli lyhempi kuin ensimmäisen, joten hybridimallia käyttäneiden opiskelijoiden ennen tenttiä tapahtuneen opiskelun hyöty saattoi vielä vaikuttaa vahvemmin lopputestissä.

Perustaitotestin ja ensimmäisen opintojakson sisällöt ovat lisäksi luonteeltaan kertaavampia ja täysin uuden matematiikan osaamisen kehittymiseksi tarvitaan sen parissa työskentelyä. Jos taitojen käyttäminen jää opintojakson jälkeen, näkyy tämä osaamisessa. Kiintoisaa on myös, että ensimmäisen matematiikan opintojakson tentin ja lopputestin välillä on kulunut enemmän aikaa kuin toisen opintojakson tentin ja lopputestin. Silti saatujen tulosten mukaan osaaminen on parantunut ensimmäisen opintojakson sisällöissä jopa tilastollisesti merkitsevästi. Saatujen tulosten perusteella voidaan päätellä, että käänteinen oppiminen tukee käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden kehitystä hieman hybridimallia paremmin pidemmällä aikavälillä, ja hybridimalli paremmin lyhyellä.

Tutkimuksen tulokset olisivat voineet olla erilaisia, jos vertailuun olisi saatu mukaan laajemmin opintojaksojen sisältöalueita ja ennen kaikkea lisää matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia. Nyt tutkimuksessa päästiin käsiksi vain kahteen matemaattisen osaamisen osa-alueeseen ja kuten alaluvussa 3.3 havaittiin, käänteisellä oppimisella voidaan vaikuttaa useampaan ulottuvuuteen. Nykyisellä lopputestillä ei voida tutkia kaikkien matemaattisen osaamisen osa-alueiden kehitystä eikä myöskään kattavasti insinöörimatematiikan opintojaksojen sisältöjen osaamisessa tapahtuvia muutoksia. Jotta näistä saataisiin tutkimuksellista tietoa, tulisi testissä olla paremmin opintojaksojen sisältöjä vastaavia tehtäviä tai täysin samoja tehtäviä kuin tentissä. Opiskelijan tulisi myös pystyä perustelemaan vastauksensa. Joitakin matemaattisen osaamisen ulottuvuuksia olisi mielekkäämpää ja tarkoituksenmukaisempaa tutkia laadullisin menetelmin. Esimerkiksi opiskelijan matematiikkakuvasta voitaisiin saada parempi kuva kyselyjen ja haastattelujen avulla.

Käänteinen oppiminen ylipäätään oli suurimmalle osalle opiskelijoista uusi oppimismuoto, mikä voi sekin alkuun vaatia totuttelua. On myös tärkeää huomata, että käänteisellä menetelmällä opettaminen oli uutta myös opintojaksojen järjestäjille, ja käytänteet elivät käytännöstä saadun kokemuksen pohjalta. Toisella insinöörimatematiikan opintojakson toteutuksella käytänteet olivat jo tutumpia sekä opiskelijoille että opettajille. Uudella menetelmällä opiskelu voi alkuun myös heikentää tuloksia ja vaikuttaa osaan opiskelijoista negatiivisesti [17]. Tämä ei toisaalta ollut linjassa sen kanssa, että ensimmäisen opintojakson aiheista juuri testiryhmän osaaminen kehittyi enemmän. Myöskään verrokkiryhmä ei opiskellut täysin perinteisesti, ja useat aiemmat tutkimukset tarkastelivat oppimistuloksia nimenomaan verraten perinteiseen luento-opetukseen [7] [25] [20] [4]. Näin ollen tämän tutkimuksen tuloksia ei voitu täysin verrata edellisiin tutkimuksiin, koska menetelmien väliset eroavaisuudet eivät ole yhtä radikaalit. Vertailupohjaa samankaltaisiin tutkimuksiin ei oikeastaan ollut, sillä suurin osa tutki välittömiä oppimistuloksia opintojaksojen jälkeen eikä pitkäaikaisempaa oppimista oltu juuri tutkittu [29].

9 Johtopäätökset ja jatkotutkimus

Tässä luvussa tiivistetään tutkimuksen tulosten perusteella tehdyt johtopäätökset, pohditaan kehitysehdotuksia testeihin ja opintojaksojen tentteihin matemaattisen osaamisen kehittymisen tutkimisen kannalta. Lisäksi ehdotetaan mahdollisia jatkotutkimuksen aiheita. Tehtävistä on vertailtu ainoastaan käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden kehitystä Kilpatrickin ym. ja Joutsenlahden matemaattisen osaamisen määritelmän mukaan, joten tulokset eivät anna kokonaisvaltaista kuvaa opiskelijoiden matemaattisen osaamisen kehityksestä.

Matematiikan perustaitoihin kuului muun muassa polynomifunktioiden derivointia ja integrointia sekä trigonometrisen, polynomi- ja eksponenttiyhtälön ratkaisua, yhdistetyn funktion arvon määrittämistä sekä itseisarvolausekkeen sieventämistä. Matematiikan perustaitojen osaamisen kehittymistä tuki tulosten mukaan paremmin verrokkiryhmän hybridimallin opetus. Heidän lähtötasonsa tosin oli alussa huonompi kuin testiryhmällä, koska käänteisen oppimisen menetelmää käyttänyt ryhmä sai harjoitella syksyn alussa järjestettyyn testiin etukäteen, mikä luultavasti vaikutti suorituksiin niitä parantavasti.

Ensimmäisen insinöörimatematiikan opintojakson aiheista yhdistetyn funktion määrittämisen, derivoinnin, raja-arvon, trigonometristen funktioiden ja määrätyn integraalin laskemisen osaaminen kehittyi tutkimuksen tulosten mukaan paremmin käänteisen oppimisen keinoin. Toisen insinöörimatematiikan opintojakson sisällöistä testattiin matriisin determinanttia, nolla- tai sarakeavaruuden dimensioita, kääntyvyyttä, ominaisarvoja ja ominaisvektoreita, matriisiyhtälöitä, lineaarikombinaatiota sekä diagonalisoituvuutta. Näiden aihepiirien osaaminen heikkeni sekä hybridimallilla että käänteisesti oppien. Hybridimallilla osaaminen heikkeni kuitenkin vähemmän. Ensimmäisen opintojakson aihepiirien vertailujen välillä kului pidempi aika kuin toisen opintojakson vertailussa. Tästä voidaan päätellä, että käänteinen oppiminen saattaa tukea matemaattisen osaamisen kehittymistä hybridimallia paremmin pidemmällä aikavälillä. Toisen opintojakson osaamisen heikkeneminen voi olla sidoksissa opintojakson sisältöön. Matriisilaskenta oli täysin uusi matematiikan osa-alue insinööriopinnot aloittaville, minkä vuoksi osaamisen kehittymisen takaamiseksi taitoja tulisi käyttää aktiivisesti vielä kurssin jälkeenkin.

Jotta jatkossa voitaisiin tutkia matemaattisen osaamisen kehitystä luotettavammin, tulisi vertailujen välillä kuluneiden aikavälien olla samat. Nythän ensimmäisen opintojakson osaamisen kehitystä tarkasteltiin pidemmällä aikavälillä kuin toisen opintojakson kohdalla. Luotettavampien ja yksityiskohtaisempien tulosten saamiseksi tulisi lopputestin tehtävien olla paremmin yhteydessä opintojaksojen tenttien tehtävien kanssa. Siis joko tenttejä tai lopputestiä laatiessa olisi järkevää ottaa huomioon mahdollisesti toteutettava tutkimus ja vertailuasetelma. Vertailuasetelman yhdenmukaistamiseksi ryhmien tulisi molempien harjoitella perustaitotestiin etukäteen tai se tulisi jättää väliin molempien ryhmien kohdalla. Muiden matemaattisen osaamisen osa-alueiden mittaamiseksi voisi kehittää muita arviointikeinoja kuin tentit ja testit. Esimerkiksi opiskelijan matematiikkakuvasta tai sen kehityksestä on lähes mahdotonta saada tietoa tentillä.

Näiden kehitysehdotusten kautta tutkimus voisi olla hedelmällistä toteuttaa uudelleen, tutkia laajemmin opintojaksojen aihepiirien matemaattisen osaamisen kehittymistä tai tutkia useamman matemaattisen osaamisen ulottuvuuden kehitystä. Olisi mielenkiintoista tietää, vaikuttaako tietty opetusmenetelmä enemmän johonkin matemaattisen osaamisen alueeseen. Tutkimukseen voisi valita verrokkiryhmäksi myös täysin perinteisen luento-opetuksen, jolloin tulokset olisivat paremmin vertailtavissa aiempien tutkimusten tuloksiin.

Lähteet

[1] Astala, K., Kivelä, S., Koskela, P., Martio, O., Näätänen, M. ja Tarvainen, K. PISA-tutkimus vain osatotuus suomalaisten matematiikan taidoista. *Matematiikkalehti Solmu*. Vol 1. 2005. pp 4–5. URL https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/1/solmu29.pdf (Viitattu 13.5.2020)

[2] Bergmann, S. ja Sams, A. *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. 1st ed. Eugene, Oregon, Arlington, Virginia: ISTE. 2012. pp 1–112.

[3] Bonwell, C., C. ja Eison, J., A. Active Learning: Creating Excitement in the Classroom. *ASHE-ERIC Higher Education Reports*. 1991. 121 s. URL https://files-eric-ed-gov.libproxy.tuni.fi/fulltext/ED336049.pdf (Viitattu 26.8.2020)

[4] Cronhjort, M., Filipsson, L. ja Weurlander, M. Improved engagement and learning in flipped-classroom calculus. *Teaching Mathematics and its Applications*. Vol 37. 2018. pp 113–122. URL https://pdfs.semanticscholar.org/9ef8/2841f43d222b8bec28f586e7c3dfb5ed67af.pdf?_ga=2.229238612.952484518.1594215720-142456993.1594215720 (Viitattu 8.7.2020)

[5] Edwards, C. H. ja Penney, D. E. *Differential equations and linear algebra*. 2nd ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall. 2005. 751 s.

[6] Flipped Learning Network. *What Is Flipped Learning? The Four Pillars of F-L-I-P*. Flip Learning. 2014. pp 1–2. URL https://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/FLIP_handout_FNL_Web.pdf (Viitattu 3.7.2020)

[7] Foldnes, N. The flipped classroom and cooperative learning: Evidence from a randomised experiment. *Active Learning in Higher Education*. Vol 17. 2016. pp 39–49. URL https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/2329490619833397 (Viitattu 10.7.2020)

[8] Garrison, D., R. ja Kanuka, H. Blended learning: Uncovering its transformative potential in higher education. *The Internet and Higher Education*. Vol 7. 2003. pp 95–105.

[9] Graham, C., R., Woodfield, W. ja Buckley Harrison J. A framework for institutional adoption and implementiation of blended learning in higher education. *The Internet and Higher Education*. Vol 18. 2013. pp 4–14. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1096751612000607?via%3Dihub (Viitattu 14.8.2020)

[10] Hirsto, L., Hyppönen, L. ja Sointu, E. Perspectives on University Students' Self-Regulates Learning, Task-Avoidance, Time Management and Achievement in a Flipped Classroom Context. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*. Vol 18, No 13. 2019. pp 87–106. URL https://core.ac.uk/reader/287760930 (Viitattu 13.5.2020)

[11] Holton, D. ja Clarke, D. Scaffolding and metacognition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol 37, Issue 2. 2006. pp 127–143. URL https://doi.org/10.1080/00207390500285818 (Viitattu 10.7.2020)

[12] Humaloja, M., Peura, P. ja Toivola, M. *Flipped learning – käänteinen oppiminen*. 1st-2nd ed. Helsinki: Edita Publishing Oy. 2018. pp 20–96.

[13] Jalonen, L., Keranto, T. ja Kaila, K. *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.–26.11.2004*. Oulu. 2005. p. 75. URL http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.603.575&rep=rep1&type=pdf#page=73 (Viitattu 26.6.2020)

[14] Johnson, R. T. ja Johnson, D., W. Active Learning: Cooperation in the Classroom. *The Annual Report of Educational Psychology in Japan*. Vol 47. 2008. pp. 29–30. URL https://www.jstage.jst.go.jp/article/arepj1962/47/0/47_29/_pdf (Viitattu 13.8.2020)

[15] Joutsenlahti, J. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä - 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2005. 271 s. URL https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 12.5.2020)

[16] Joutsenlahti, J., Kangas, J., Miilumäki, T., Pohjolainen, S. ja Silius, K. Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä? *Tampere University Press*. 2011. pp 243–265. URL https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/66175/korkeakoulumatematiikka_teekkarin_kompastuskivena_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 13.5.2020)

[17] Kantanen, H., Koponen, J. ja Sointu, E. Including the Student Voice: Experiences and Learning Outcomes of a Flipped Communication Course. *Business and Professional Communication Quarterly*. 2019. pp 337–356. URL https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/2329490619833397 (Viitattu 30.7.2020)

[18] Kilpatrick, J., Swafford, J. ja Findell, B. (toim). *Adding it up*. Washington DC: National Academy Press. 2001. pp 115–155.

[19] Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. ja Vettenranta, J. *PISA12 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriö. 2013. pp 10–31. URL https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/75271/okm20.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 11.6.2020)

[20] Lai, C.-L. ja Hwang, G.-J. A self-regulated flipped classroom approach to improving students' learning performance in a mathematics course. *Computers & Education*. Vol 100. 2016. pp 126–140. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131516301166 (Viitattu 10.7.2020)

[21] Larson, R. ja Falvo, D, C. *Elementary Linear Algebra*. 6th ed. Boston, New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company. 2009. 480 s.

[22] Lay, D. C. *Linear algebra and its applications*. 2nd ed. Addison Wesley Longman, Inc. 1998. 112 s.

[23] Leino, K., Ahonen, A. K., Heinonen, N., Hiltunen, J., Lintuvuori, M., Lähteinen, S., Lämsä, J., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Pulkkinen, J., Rautapuro, J., Siren, M., Vainikainen, M. ja Vettenranta, J. *PISA18 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriö. 2018. pp 29–33. URL https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/161922/Pisa18-ensituloksia.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 14.6.2020)

[24] Metsämuuronen, J. *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. Tutkijalaitos. 4. laitos, 1st ed. International Methelp Oy. 2009. 1632 s.

[25] Missildine, K., Fountain, R., Summers, L., Gosselin, K. Flipping the classroom to improve student performance and satisfaction. *Journal of Nursing Education*. Vol 52. 2013. pp. 597–599. URL https://pdfs.semanticscholar.org/227d/f9eb23132373058f89aa3ab514aba14768b1.pdf (Viitattu 10.7.2020)

[26] Myllykoski, T., Mattila, P., Ali-Löytty, S., Kaarakka, T. ja Viro, E. Yliopistomatematiikan sähköisten tehtävien virheluokittelun ja matemaattisen ajattelun kehittäminen. *FMSERA Journal*. Vol 2, Issue 1. 2018. pp. 46–55. URL https://journal.fi/fmsera/article/view/69887/38422 (Viitattu 10.7.2020)

[27] Myllykoski, T., Ali-Löytty, S. ja Pohjolainen, S. Opiskelijoiden oppimistyökalujen käyttö tietokoneavusteisessa matematiikkajumppa-tukiopetuksessa. *Proceedings of the annual FMSERA symposium 2016*. 2016. pp. 54–65. URL https://journal.fi/fmsera/article/view/60937/27042 (Viitattu 25.9.2020)

[28] Niss, M. ja Højgaard, T (eds). *Competencies and Mathematical Learning - Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMFUFAtekst - I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK. English edition. 2011, nro 485. pp 6–80. URL https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf (Viitattu 12.6.2020)

[29] O'Flaherty, J. ja Phillips, C. The use of flipped classrooms in higher education: A scoping review. *Internet and Higher Education 25*. 2015. pp 85–95. URL https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.02.002 (Viitattu 13.5.2020)

[30] Poole, D. *Linear algebra: A modern Introduction*. 2nd ed. Thomson Brooks/Cole. 2006. 712 s.

[31] SEFI mathematics working group. *Mathematics for the European Engineer, a Curriculum for the twenty-first Century*. SEFI HQ. 2002. pp 3–5. URL http://sefi.htw-aalen.de (Viitattu 13.5.2020)

[32] SEFI mathematics working group. *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering education*. SEFI HQ. 2013. pp 1–86. URL http://sefi.htw-aalen.de/Curriculum/Competency%20based%20curriculum%20incl%20ads.pdf (Viitattu 18.6.2020)

[33] Silius, K., Pohjolainen, S., Kangas, J., Miilumäki, T. ja Joutsenlahti, J. What can we do to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics? *IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*. 2011. pp 428–436. URL https://www.researchgate.net/publication/224238626_What_can_be_done_to_bridge_the_competency_gap_between_upper-secondary_school_and_university_mathematics)

[34] Tampereen yliopisto, Hervannan kampus. Opinto-opas 2019-2020, MAT-1120 Insinöörimatematiikka B 1, 5 op. 2019-2020. URL https://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/avoin/aineryhmat/Matematiikka/MAT-01120.html (Viitattu 12.5.2020)

[35] Tampereen yliopisto, Hervannan kampus. Opinto-opas 2019-2020, MAT-1220 Insinöörimatematiikka B 2, 5 op. 2019-2020. URL https://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/avoin/aineryhmat/Matematiikka/MAT-01220.html (Viitattu 12.5.2020)

[36] Toivola, M. *Käänteinen arviointi*. 1st ed. Helsinki: Edita Publishing Oy. 2019. pp 9–109.

[37] Toivola, M. Flipped Assessment - A leap towards Flipped learning. An article in conference proceedings Brandhofer, G., Buchner, J., Freibleben-Teutscher, C. ja Tengler, K (Hrsg.) Austria, Baden: *Tagungsband zur Tagung Inverted Classroom and beyond 2020*. 2020. pp 1–8 URL http://www.flippedlearning.fi/p/kaanteinen-oppiminen.html (Viitattu 13.5.2020)

[38] Toivola, M. ja Silfverberg, H. Flipped learning –approach in mathematics teaching – a theoretical point of view. Oulu: *Proceedings of the Symposium of Finnish Mathematics and Science Education Research Association*. 2015. pp 1–10. URL http://www.flippedlearning.fi/p/kaanteinen-oppiminen.html (Viitattu 13.5.2020)

[39] Tuomi, J. ja Sarajärvi A. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. 1st ed, uudistettu laitos. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi. 2018. 204 s.

[40] Vaughan, N. Designing for a Blended Community of Inquiry. *Blended learning in Finland*. Faculty of Social Sciences at the University of Helsinki. 2010. pp. 11–29. URL https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/158389/blended_learning_Finland.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 4.8.2020)

[41] Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K, Lähteinen, S., Nissinen, K, Nissinen, V., Puhakka, E., Rautapuro J. ja Vainikainen, M. *PISA15 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriö. 2015. pp 39–40. URL http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79052/okm41.pdf?sequence=1&isAllowed=y (Viitattu 14.6.2020)

[42] Vilkka, H. *Tutki ja mittaa: Määrällisen tutkimuksen perusteet*. 1st ed. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi. 2007. 189 s.

[43] Vygotsky, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Prosesses*. 2nd ed. Harvard University Press. 1979. 159 s.

[44] Ziegelmeier L. B. ja Topaz C. M. Flipped Calculus: A Study of Student Performance and Perceptions. *PRIMUS*. Vol 25, Issue 9–10. 2015. pp 847–860. URL https://doi.org/10.1080/10511970.2015.1031305 (Viitattu 10.7.2020)

LIITE A: Lopputestin (ja perustaitotestin) tehtävät

1. (3.)

Sievennä seuraava lauseke:

$$|4-\sqrt{3}|+|1-\sqrt{3}|=$$

2. (6.)

Olkoon $f(x)=5x+3$. Laske yhdistetyn funktion $(f\circ f)(x)$ arvo pisteessä $x=3$.

$(f\circ f)(3)=$

3. (8.)

Ratkaise 3. asteen yhtälö $5\,x^3-125\,x=0$. Vastaukseksi tulee kolme muuttujan x arvoa. Anna ratkaisut tarkkoina arvoina!

Huom. Neliöjuuri a:sta merkitään sqrt(a), esim. $\sqrt{2}$ kirjoitetaan sqrt(2).

$x_1=$

$x_2=$

$x_3=$

4. (12.)

Laske yhtälön $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ ratkaisu, joka on ensimmäisessä neljänneksessä eli $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$. Anna vastaus radiaaneissa. Merkitse vastauksessa lukua π kirjoittamalla pi. Esimerkiksi $\dfrac{\pi}{4}$ kirjoitetaan pi/4.

$x=$

5. (13.)

Ilmoita yhtälön $\cos(3\,x)=0$ ratkaisuista pienin, joka on ensimmäisessä neljänneksessä eli $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. Anna vastaus radiaaneissa. Merkitse vastauksessa lukua π kirjoittamalla pi.

$x=$

6. (14.)

Derivoi $f(x)=4\,x^3+4$.

Esimerkki: lauseke $3x^2+5x+1$ kirjoitetaan 3*x^2+5*x+1.

$f'(x)=$

7. (15.)

Laske määrätty integraali $\int_{-3}^{5}(3\,x^4 + 5\,x^2 - 5)\,dx$.

Anna vastaus tarkkana arvona, tarvittaessa murtolukuna.

$\int_{-3}^{5}(3\,x^4 + 5\,x^2 - 5)\,dx =$

8. (16.)

Ratkaise eksponenttiyhtälö $6^x = 10$.

Luonnollinen logaritmi syötetään vastaukseen komennolla ln() kirjoittamalla logaritmin argumentti sulkujen sisään, esimerkiksi ln(32).

$x =$

9.

Onko väite tosi vai epätosi? Valitse vastaus pudotusvalikosta.

Jos funktio f ei ole jatkuva pisteessä a, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä a.

Ei vastattu

Jos funktio f on surjektio, mitkään kaksi määrittelyjoukon alkiota eivät kuvaudu samaksi alkioksi.

Ei vastattu

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä a on olemassa, jos toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja ne ovat samat. Ei vastattu

11.

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on määritelty seuraavasti

$$7, \text{jos}\, x \leq -4$$
$$x + 11, \text{jos} -4 < x \leq -3$$
$$x^2 - 1, \text{jos} -3 < x < 2$$
$$2, \text{jos}\, x = 2$$
$$9 - 3\,x, \text{jos}\, x > 2.$$

Määritä seuraavat raja-arvot.

$\lim_{x \to 2-} f(x) =$

$\lim_{x \to 2+} f(x) =$

Valitse pudotusvalikosta totuusarvot seuraaville väitteille.

Raja-arvo $\lim_{x \to 2} f(x)$ on olemassa. Ei vastattu

Funktio $f(x)$ on jatkuva. Ei vastattu

12.

Derivoi $f(x) = \ln\left(\left(x^2 - 10\,x + 29\right)^6\right)$

Derivaatta on $f'(x) =$

13.

Etsi funktion

$$f(x) = x^3\sqrt{2x^4+14}$$

se integraalifunktio $F(x) = \int f(x)\,dx$, jonka kuvaaja $y = F(x)$ kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta.

Kyseinen integraalifunktio on $F(x) =$

14.

Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ja näitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Laske $A^3\mathbf{x}$, kun $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$$A^3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

16.

Olkoon A 3×3-matriisi, jolle $\det(A) = 2$.

- Laske $\det(2A \cdot 2B)$, kun $\det(B) = 2$.
- Mikä on matriisin A nolla-avaruuden dimensio?
- Kuinka monta ratkaisua on matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = 0$?
- Voidaanko jokainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori lausua matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaationa? Ei vastattu
- Onko nolla matriisin A ominaisarvo? Ei vastattu
- Onko matriisi A kääntyvä? Ei vastattu

LIITE B: IMA 1 tenttitehtävät

2.

Tarkastellaan reaalifunktioita $f(x) = 2\ln(2x-6)$ ja $g(x) = 3+e^x$. Muodosta yhdistettyjen funktioiden $f \circ g$ ja $g \circ f$ lausekkeet ja sievennä ne. Selvitä lisäksi yhdistettyjen funktioiden määrittelyjoukot.

3.

a) Osoita erotusosamäärän raja-arvon kautta, että funktion $f(x) = x^2 + 3x$ derivaatta on $f'(x) = 2x + 3$.

b) Laske integraali

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx.$$

LIITE C: IMA 2 tenttitehtävät

1.

Tarkastellaan 4×4 matriisia A, jonka aste $\mathrm{rank}(A) = 3$, ja kääntyvää 4×4 matriisia B.

Tämä on monivalintatehtävä. Jokaisessa kohdassa on vain yksi oikea vaihtoehto. Valitse oikea vaihtoehto kuhunkin kohtaan. Mikäli et tiedä vastausta, vastaa en tiedä. Tällöin kohdasta tulee nolla pistettä, väärästä vastauksesta puolestaan tulee puolen pisteen pistemenetys. Jokaiseen kohtaan tulee valita yksi vaihtoehdoista, jotta vastaus hyväksytään.

Onko matriisi A kääntyvä?

- ei
- kyllä
- en tiedä

Mikä on matriisin A sarakeavaruuden dimensio?

- nolla
- yksi
- kaksi
- kolme
- neljä
- seitsemän
- dimensiota ei voida tietää yksikäsitteisesti annettujen tietojen perusteella
- en tiedä

Kuinka monta ratkaisua matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on?

- nolla
- yksi
- kaksi
- kolme
- neljä
- seitsemän
- äärettömän monta
- jokin muu äärellinen lukumäärä
- en tiedä

Paljonko on $\det(AB)$?

- nolla
- sama kuin $\det(B)$
- determinanttia ei voida määrittää annetuilla tiedoilla
- ääretön
- en tiedä

Ovatko matriisin B sarakkeet lineaarisesti riippuvia?

- ei
- kyllä
- tätä ei voida määrittää annetuilla tiedoilla
- en tiedä

Onko $\mathrm{rref}(A) = I$?

- ei
- kyllä
- tätä ei voida määrittää annetuilla tiedoilla
- en tiedä

4.

Olkoon matriisi $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

```
M=[1,0,3,-3;0,4,0,0;3,0,1,3;0,0,0,4]
```

```
M = 4x4
     1     0     3    -3
     0     4     0     0
     3     0     1     3
     0     0     0     4
```

a) Anna matriisin *M* ominaisarvot ja ominaisvektorit.

b) Onko matriisi *M* diagonalisoituva? Perustele.

Tarkastellaan sitten kahta matriisia $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

c) Olkoon $Ax = Bx$, missä *A* on kääntyvä matriisi. Osoita, että matriisin $A^{-1}B$ eräs ominaisarvo on 1.